2009 年研究生入学考试数学一试题及分析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）当 $x\to 0$ 时，$f\left(x\right)=x-\sin ax$ 与 $g\left(x\right)=x^2\ln\left(1-bx\right)$ 为等价无穷小，则

（A） $a=1,b=-\frac{1}{6}$ （B） $a=1,b=\frac{1}{6}$

（C） $a=-1,b=-\frac{1}{6}$ （D） $a=-1,b=\frac{1}{6}$ [ ]

【分析】本题考查等价无穷小. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=1$，求参数 a,b 的值. 由于“ $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限值等于分子、分母的最低阶无穷小项之比的极限 ”，则利用等价无穷小和皮亚诺型余项的泰勒公式推导即可.

【详解】当 $x\to 0$ 时，$f\left(x\right)=x-\sin ax=x-\left(ax-\frac{1}{3!}\left(ax\right)^3+o\left(x^3\right)\right)$

$$=\left(1-a\right)x+\frac{1}{3!}\left(ax\right)^3-o\left(x^3\right).$$

$$g\left(x\right)=x^2\ln\left(1-bx\right)\sim -bx^3.$$

因为 $f\left(x\right)=x-\sin ax$ 与 $g\left(x\right)=x^2\ln\left(1-bx\right)$ 为等价无穷小，

所以$1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1-a\right)x+\frac{1}{3!}\left(ax\right)^3-o\left(x^3\right)}{-bx^3}\Rightarrow 1-a=0,b=-\frac{1}{3!}$.

故 $a=1,b=-\frac{1}{6}$，即选（A）.

【评注】本题为基础题型，也可利用洛必达法则计算.

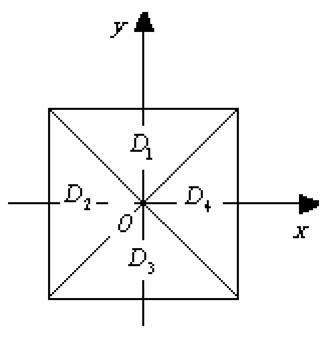
由题设可知$1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(-3bx^2\right)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-a\cos ax\right)=0\Rightarrow a=1$.

故原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}\Rightarrow b=-\frac{1}{6}$.

本题实质考查极限中的常数的确定，类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 1 讲【例 16】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 1 章【例 1.36】，精选习题一第 2 小题（7）（8）；文登冲刺§1【例 1】；《考研数学精题 660》（1.11，1.20）．

（2）如图，正方形 $\left\{(x,y)\,|\,|x|\le 1,|y|\le 1\right\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\left(k=1,2,3,4\right)$，$I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $\max\limits_{k} I_k=$



（A） I_1　（B） I_2　（C） I_3　（D） I_4　[　　]

【分析】本题考查利用函数的奇偶性与区域的对称性简化二重积分的计算. 需牢记相关结论.

【详解】被积函数 $y\cos x$ 关于 y 为奇函数，关于 x 为偶函数，而 D_2,D_4 均关于 x 轴对称，所以 $I_2=\iint\limits_{D_2} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$I_4=\iint\limits_{D_4} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

D_1,D_3 均关于 y 轴对称，所以

$$I_1=\iint\limits_{D_1} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{0\le x\le 1,x\le y\le 1} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge 0,$$

$$I_3=\iint\limits_{D_3} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{0\le x\le 1,-1\le y\le -x} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le 0.$$

故选（A）．

【评注】（1）二重积分的对称性结论如下：

设积分域 D 关于坐标轴对称，被积函数 $f(x,y)$ 为奇偶函数的积分，

（i）若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & \text{关于}y\text{为奇函数}\\ \iint\limits_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \text{关于}y\text{为偶函数}\end{cases};$$

其中 D^* 为 D 关于 x 轴的上半部分.

（ii）若 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & \text{关于}x\text{为奇函数}\\ \iint\limits_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \text{关于}x\text{为偶函数}\end{cases};$$

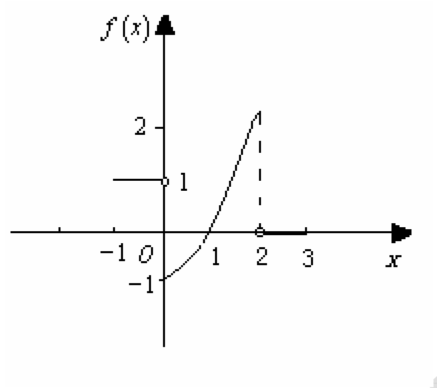
其中 D^* 为 D 关于 y 轴的右半部分.

（2）本题还利用了二重积分的比较定理

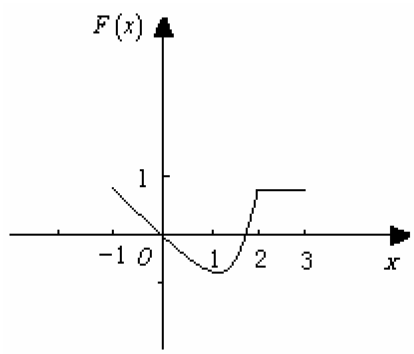
设 $f(x,y)\le g(x,y),(x,y)\in D$，则 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_{D} g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 10 讲【例 1】【例 2】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 10 章【例 10.1】；文登冲刺§1【例 5】.

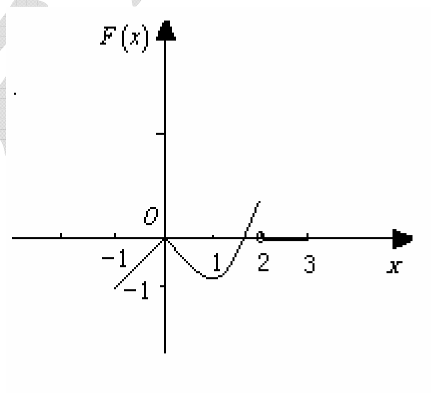
（3）设函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-1,3\right]$ 上的图形为



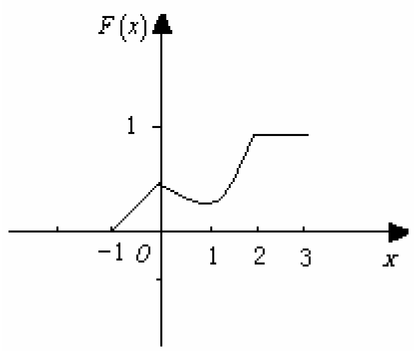
则 $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ 的图形为



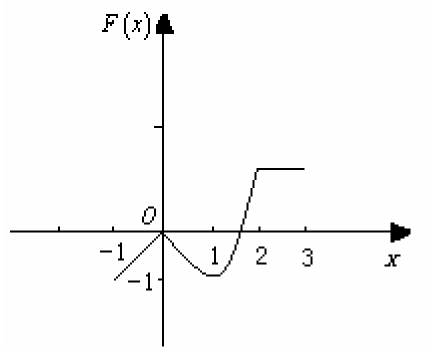
（A）



（B）



（C）



（D）

[　　]

【分析】本题考查函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ 图形的关系. 利用函数的单调增减性判断.

【详解】由图可知，在 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,0\right),\left(0,2\right),\left(2,3\right)$ 连续，所以 $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ 在 $\left(-1,0\right),\left(0,2\right),\left(2,3\right)$ 可导，且 $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

（1）在区间$\left(-1,0\right)$，$f\left(x\right)\geq 0$，则$F\left(x\right)$在此区间单调递增，排除（A）.

（2）$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$表示$y=f\left(x\right),x=0,x=x$与$x$轴所围曲边梯形位于$x$轴上方的图形面积减去位于$x$轴下方的图形面积所得差值，当$0<x<1$时，由图可知$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t<0$，排除（C）.

（3）又当$2<x<3$时，$f\left(x\right)=0$，因此$\lim\limits_{x\to 2^-}F\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=F\left(2\right)$，$\lim\limits_{x\to 2^+}F\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t+\lim\limits_{x\to 2^+}\int_2^x f\left(t\right)\mathrm{d}t=F\left(2\right)$，所以$F\left(x\right)$在$x=2$连续，排除（B），故选（D）.

【评注】本题为一新题型，综合考查了原函数的性质、定积分的几何意义、函数的单调增减性和函数的连续性..

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第6讲【例3】；2009版《数学复习指南》（理工类）精选习题六第1小题（3）.

（4）设有两个数列$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则

（A）当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛　（B）当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散

（C）当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛　（D）当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right|$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$发散　[　　]

【分析】本题考查抽象级数的敛散性. 根据题目特征，适合用举反例排除法.

【详解】取$a_n=b_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，排除（A）.

取$a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$收敛，排除（B），（D）. 故选（C）.

【评注】 事实上，因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以取$\varepsilon=1$，存在$N>0$，使得$n>N$时，$\left|a_n\right|\leq 1$，即有$a_n^2b_n^2\leq b_n^2$，又由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right|$收敛可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$收敛，故由正项级数的比较判别法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 11 讲【例 5】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 7 章【例 7.10】，精选习题七第 1 小题（4）（5）；《考研数学精题 660》（1.370）．

（5）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}_3$ 的一组基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为

（A）$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}$　　（B）$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$　　（D）$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$　　[　　]

【分析】本题考查过渡矩阵. 要求满足 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\boldsymbol{P}$ 的 $\boldsymbol{P}$.

可先求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，然后求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 即为所求.

【详解】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}_2$，则

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\boldsymbol{P}_2=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2.$$

而 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}$，

$\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，即 $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$.

故由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix},$$

即选（A）.

【评注】本题为基础题型，关键要记住过渡矩阵的计算公式.

对于向量空间 R^n 中的两组基：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，若存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\left[\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\right]=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\right]\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{P}$ 称为基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

本题还可以用赋值法求解，如下：

取 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,3)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,3)^{\mathrm{T}},$$

于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix},$$

故排除选项（B）、（C）、（D），即选（A）.

相关公式见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 3 讲；类似例题见《数学题型集粹与练习题集》第 2 篇第 3 章（题型 5）.

（6） 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

（A） $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　（B） $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

（C） $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　（D） $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　[　　]

【分析】本题考查分块矩阵的伴随矩阵的计算.考虑到本题条件和备选项特征，本题可用逆推法求解，即根据 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，只要分别计算 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 与四个选项的乘

积，看哪一个结果为$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} E_4 = |A||B| E_4$.

【详解】因为$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2|A|E & O \\ O & 3|B|E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A|^2 E & O \\ O & |B|^2 E \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3|A|E & O \\ O & 2|B|E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A||B|E & O \\ O & |A||B|E \end{pmatrix} = |A||B|\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

而$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = |A||B|$，所以选（B）.

【评注】本题利用了伴随矩阵的性质 $AA^* = |A|E$． 在 2002 年考查过相同题型.

本题也可以直接求解，如下：

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = |A||B|\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} O & |A||B|B^{-1} \\ |B||A|A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix},$$

故选（B）.

完全类似公式见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 2 讲（重要公式和结论 4）；类似例题见《考研数学精题 660》（2.18）.

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $EX =$

（A）0　　（B）0.3　　（C）0.7　　（D）1　　[　　]

【分析】已知随机变量 X 的分布函数，求它期望. 先求出密度函数，然后利用标准正态分布的性质和期望的计算公式求解.

【详解】由题设可知 X 的密度函数为

$$f(x) = 0.3\varphi(x) + 0.35\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)$$ （$\varphi(x)$ 为标准正态分布的密度函数）

于是 $EX = 0.3\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x + 0.35\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x$

$$=0+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2}\right)\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=0.7\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x-1}{2}\right)=0.7.$$ 故选（C）.

【评注】本题利用了$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1,\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=0$.

类似例题见2009版《数学复习指南》（理工类）第3篇第3章【例3.2】【例3.3】；《考研数学精题660》（3.76）.

（8）设随机变量X与Y相互独立，且X服从标准正态分布$N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，记$F_Z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数，则函数$F_Z(z)$的间断点的个数为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D） 3　　[　　]

【分析】本题考查二维随机变量函数的分布函数函数的间断点. 先求出$F_Z(z)$的表达式，然后再求间断点.

【详解】$F_Z(z)=P\{Z<z\}=P\{XY<z\}$

$$=P\{XY<z\,|\,Y=0\}P\{Y=0\}+P\{XY<z\,|\,Y=1\}P\{Y=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{XY<z\,|\,Y=0\}+\frac{1}{2}P\{XY<z\,|\,Y=1\}$$

因为X与Y相互独立，所以

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{0<z\}+\frac{1}{2}P\{X<z\}.$$

当$z\le 0$时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{X<z\}=\frac{1}{2}\Phi_X(z)$，

当$z>0$时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P\{X<z\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi_X(z)$.

于是 $\lim\limits_{z\to0^-}F_Z(z)=\frac{1}{4},\lim\limits_{z\to0^+}F_Z(z)=\frac{3}{4}$，所以$z=0$为$F_Z(z)$的间断点，故选（B）.

【评注】本题利用了结论：当$0<P(B)<1$时，A,B相互独立$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$.

类似例题见文登暑期强化班笔记《概率论与数理统计》第3讲【例6】；2009版《数学复习指南》（理工类）第3篇第2章【例2.44】，精选习题二2（11）；《考研数学精题660》（3.57,3.59）.

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分. 把答案填在题中横线上.

(9) 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

【分析】本题考查二元复合函数偏导数，利用复合函数求导法计算.

【详解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'=f_1'\cdot 1+yf_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+yf_2'\right)=f_{11}''\cdot 0+f_{12}''\cdot x+f_2'+yf_{21}''\cdot 0+yf_{22}''\cdot x$$

$$=xf_{12}''+xyf_{22}''+f_2'.$$

【评注】本题为基础题型. 注意多元复合函数的一阶偏导数 f_1',f_2' 仍然是以 x,y 为自变量，以 $u=x,v=xy$ 为中间变量的复合函数，再求偏导数时，仍用复合函数求导法.

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第9讲【例9】；2009版《数学复习指南》（理工类）第1篇第9章【例9.19】，精选习题九第5、6小题；《考研数学精题660》（1.255）.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为________.

【分析】本题考查齐次线性微分方程的通解与方程的关系和非齐次方程的解的性质.因为常系数齐次线性方程和其特征方程一一对应，可先从齐次线性微分方程的解的形式分析出特征方程的根，从而求出方程的形式，然后求非齐次方程的一特解，将其与对应齐次微分方程的通解相加即为非齐次方程的通解，最后根据条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 即可得所求解.

【详解】由题设可知，$\lambda=1$ 为齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的特征方程

$\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的二重根，则 $a=-2,b=1$，于是非齐次方程为

$y''-2y'+y=x$，其特解为

$$y^*=\frac{1}{D^2-2D+1}x=\left(1+2D\right)x=x+2.$$

故非齐次方程的通解为

$y=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^x+x+2$. 由 $y(0)=2$ 可得 $C_1=0$

$y'=\left[C_2x\mathrm{e}^x+x+2\right]'=C_2\left(1+x\right)\mathrm{e}^x+1$，由 $y'(0)=0$ 可得 $C_2=-1$，

所以满足条件的解为 $y=x\left(1-\mathrm{e}^x\right)+2$.

【评注】(1) 对于二阶常系数线性齐次方程 $y''+py'+qy=0$，

其特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，根为 λ_1,λ_2，

①当 λ_1,λ_2 为相异的实根时，方程的通解为：$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$；

②当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，方程的通解为：$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$；

③当 $\lambda=\alpha\pm i\beta$ 时，方程的通解为：$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

(2) 对于二阶常系数线性非齐次方程 $y''+py'+qy=f(x)$，若对应齐次方程的通解为 Y，一特解为 $y*$，则其通解 $y=Y+y*$.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第7讲【例9】【例11】；2009版《数学复习指南》(理工类) 第1篇第5章【例5.16】【例5.17】；文登冲刺§12【例3】；《考研数学精题660》(1.226).

(11) 已知曲线 $L:y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$，则 $\int_L x\mathrm{d}s=$________.

【分析】本题考查对弧长的曲线积分，化为路径参数的定积分计算..

【详解】$\int_L x\mathrm{d}s=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{(x')^2+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}\left(4x^2\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[1+4x^2\right]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{9}{4}-\frac{1}{12}=\frac{13}{6}.$$

【评注】本题为基础题型.

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第12讲【例4】；2009版《数学复习指南》(理工类) 第1篇第11章【例11.1】；《考研数学精题660》(1.330).

(12) 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________

【分析】利用三重积分的球坐标计算.

【详解】$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$

$$=-\frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\cos\varphi=-\frac{2\pi}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{4\pi}{15}.$$

【评注】本题中被积函数与 x,y 无关，也可利用“先二后一”法计算.

由于 $\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z: x^2+y^2\le 1-z^2\\ -1\le z\le 1\end{cases}$，所以

$$I=\int_{-1}^{1}z^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}z^2\cdot\pi\left(1-z^2\right)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1 z^2\left(1-z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi.$$

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 10 讲§3【例 4】;2009 版《数学复习指南》(理工类)第 1 篇第 10 章【例 10.22】;《考研数学精题 660》(1.314).

(13) 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为________ .

【分析】 利用特征值的定义 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$.

【详解】由题设可知 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,设 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为 λ,则 $\lambda^2=2\lambda$,得 $\lambda=2$,$\lambda=0$ (舍去).

【评注】对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,若 $r\left(\boldsymbol{A}\right)=1$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\lambda^n-\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right)\lambda^{n-1}.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii},\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

$r\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)=1$,于是矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$.

类似例题见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 5 讲【例 3】;2009 版《数学复习指南》(理工类)第 2 篇第 5 章【例 5.4】;文登冲刺题§1【例 5】.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B\left(n,p\right)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差,若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量,则 $k=$__________ .

【分析】本题考查无偏估计. 利用 $E\left(\overline{X}+kS^2\right)=np^2$ 计算即可.

【详解】由题设可知 $E\overline{X}=np$,$ES^2=np\left(1-p\right)$. 若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量,

则 $E\left(\overline{X}+kS^2\right)=np^2$,即 $E\overline{X}+kES^2=np^2$,于是

$$np+knp\left(1-p\right)=np^2,\text{ 解之得 } k=-1.$$

【评注】本题为基础题型. 记住无论总体 X 服从什么分布,只要样本 $\left(X_1,\cdots,X_n\right)$ 来自 X,

且

$$EX=\mu,\ DX=\sigma^2,$$

则 $E\overline{X}=\mu$，$ES^2=\sigma^2$，其中 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$.

类似例题见 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 3 篇第 6 章【例 6.11】，精选习题六第 1 小题（3）；《考研数学精题 660》（3.143）.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15） **(**本题满分 9 分)

求二元函数 $f\left(x,y\right)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

【分析】本题考查二元函数的极值. 利用极值的充分条件判定即可.

【详解】令 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2x\left(2+y^2\right)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2x^2y+\ln y+1=0\end{cases}$ 解得惟一驻点 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

由于 $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\left(2+y^2\right),B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy,C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x^2+\frac{1}{y}$，

于是

$$\left(B^2-AC\right)\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=\left[16x^2y^2-2\left(2+y^2\right)\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\right]\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}$$

$$=-2\mathrm{e}\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)<0，且 A>0，$$

故 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 为函数 $f\left(x,y\right)$ 的极小值点，且极小值为 $f\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

【评注】本题为基础题型.

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 9 讲【例 14】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 9 章【例 9.35】；《考研数学精题 660》（1.272，1.273）.

（16） **(**本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}\left(n=1,2,\cdots\right)$ 所围成区域的面积，记 $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，

$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求 S_1 与 S_2 的值.

【分析】本题考查平面图形的面积和无穷级数求和. 计算平面图形的面积时先求出两曲线的交点，然后利用平面图形的面积公式即得.

【详解】曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(0,1)$，所围区域的面积

$$a_n=\int_0^1\left(x^n-x^{n+1}\right)dx=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

于是　$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$,

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

考查幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$，知其收敛域为 $(-1,1]$，和函数为 $-\ln(1+x)$.

因此 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=x-\ln(1+x)$.

令 $x=1$ 可得　$S_2=1-\ln 2$.

【评注】本题综合考查了平面图形的面积和数项级数求和.

(1) 曲线 $y=f_1(x), y=f_2(x)$ 及直线 $x=a, x=b(a<b)$ 所围成的曲边梯形面积为

$S=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|dx$. 若在 $[a,b]$ 上，$f_1(x)\le f_2(x)$，则

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$

(2) 本题求 S_2 时利用了 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林展开式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\ (-1<x\le 1).$$

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 6 讲【例 18】; 2009 版《数学复习指南》(理工类) 第 1 篇第 7 章【例 7.28】; 完全类似例题见《考研数学精题 660》(1.373).

(17)　(本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成，圆锥面 S_2 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(Ⅰ) 求 S_1 及 S_2 的方程;

（II）求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

【分析】（I）考查旋转曲面方程；（II）考查旋转体的体积. 利用相关公式计算即可.

【详解】（I）椭球面 S_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2+z^2}{3}=1$，

设切点为 $\left(x_0,y_0\right)$，则 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 在 $\left(x_0,y_0\right)$ 处的切线方程为

$$\frac{2x_0\left(x-x_0\right)}{4}+\frac{2y_0\left(y-y_0\right)}{3}=0,\ \text{即}\ \frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1.$$

于是有

$$\begin{cases}\left.\left(\dfrac{x_0x}{4}+\dfrac{y_0y}{3}\right)\right|_{x=4,y=0}=1\\ \dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1\end{cases}，\text{解之得 } x_0=1,y_0=\pm\frac{3}{2}.$$

所以过点 $\left(4,0\right)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线 L 的方程为

$$\frac{x}{4}\pm\frac{y}{2}=1,\text{即 } y=\pm\frac{1}{2}\left(x-4\right).$$

故圆锥面 S_2 的方程为 $y^2+z^2=\dfrac{1}{4}\left(x-4\right)^2$，即 $\left(x-4\right)^2-4y^2-4z^2=0$.

（II）S_1 与 S_2 之间的立体体积等于一个底面半径为 $\dfrac{3}{2}$、高为 3 的锥体体积 $\dfrac{9}{4}\pi$ 与部分椭圆球体体积 V 之差，其中 $V=\dfrac{3}{4}\pi\int_1^2\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{4}\pi$. 故所求体积为

$$\frac{9}{4}\pi-\frac{5}{4}\pi=\pi.$$

【评注】 本题综合考查了平面图形绕坐标轴旋转后所得的旋转曲面方程、直线绕坐标轴旋转的旋转曲面方程、旋转体的体积、曲线的切线等知识点.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 6 讲§1【例 3】；2009 版《数学复习指南》(理工类) 第 1 篇第 6 章【例 6.38】, 第 8 章【例 8.19】;《考研数学精题 660》(1.201，1.202）.

(18)（本题满分 11 分）

（I）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导，则存在 $\xi\in\left(a,b\right)$，使得 $f\left(b\right)-f\left(a\right)=f'\left(\xi\right)\left(b-a\right)$；

（II）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=A$，则 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

【分析】（Ⅰ）考查拉格朗日中值定理，利用辅助函数和罗尔定理证明；
（II）由（Ⅰ）可证明.

【详解】（Ⅰ）取 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，由题意知

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a),$$

$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a).$$

根据罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

（II）对于任意的 $t\in(0,\delta)$，$f(x)$ 在 $[0,t]$ 上连续，在 $(0,t)$ 内可导，由右导数定义及拉格朗日中值定理有

$$f_+'(0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\xi)t}{t}=\lim_{t\to 0^+}f'(\xi)，其中\ \xi\in(0,t).$$

由于 $\lim\limits_{t\to 0^+}f'(t)=A$，且当 $t\to 0^+$ 时，$\xi\to 0^+$，所以 $\lim\limits_{t\to 0^+}f'(\xi)=A$.

故 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

【评注】本题（Ⅰ）为教材中一定理，文登强化班笔记中在中值定理证明部分讲原函数法时特意将拉格朗日中值定理作为例子归纳总结了辅助函数的作法，原笔记如下：

<u>对于拉格朗日中值定理</u>：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(x)+C=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

$$\Rightarrow f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+C=0$$

令$C=0$，取$F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，

于是$F\left(a\right)=F\left(b\right)=\dfrac{bf\left(a\right)-af\left(b\right)}{b-a}$，利用罗尔定理即可证.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第4讲【例8】；2009版《数学复习指南》（理工类）第1篇第4章【例4.8】；《考研数学精题660》（1.63）.

（19）(本题满分10分)

计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$是曲面$2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧.

【分析】本题中曲面Σ含奇点$\left(0,0,0\right)$，不能直接利用高斯定理，根据被积函数的形式做一小球面，然后再计算.

【详解】$P=\dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},Q=\dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}},R=\dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，

$\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{y^2+z^2-2x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}},\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{x^2+z^2-2y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}},\dfrac{\partial R}{\partial z}=\dfrac{x^2+y^2-2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

但是因为$\left(0,0,0\right)$包含在曲面$2x^2+2y^2+z^2=4$内，所以被积函数在所围区域偏导数不连续，不可以利用高斯定理. 作曲面$\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon$为一很小的正数)，取外侧，$\Omega$为$\Sigma$与$\Sigma_1$之间的部分.

于是　$$I=\oiint\limits_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

根据高斯公式有

$$\oiint\limits_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}V=0,$$

而　$$\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\varepsilon^3}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\varepsilon^2}3\mathrm{d}V=\frac{12\pi\varepsilon^3}{3\varepsilon^3}=4\pi.$$

故 $I=4\pi$.

【评注】 高斯定理要求 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在闭曲面 Σ 所围成的空间域 Ω 中具有一阶连续的偏导，否则不能利用该定理.

该题为以下文登冲刺题的特例：

计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是不经过 $\left(0,0,0\right)$ 的任一简单光滑闭曲面外侧.

解：当 $\left(x,y,z\right)\neq\left(0,0,0\right)$ 时，$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$.

(1) 若 Σ 不包含 $\left(0,0,0\right)$ 于其内，则用高斯公式，可得 $I=0$.

(2) 若 Σ 包含 $\left(0,0,0\right)$ 于其内，作一小球面 $\Sigma^*: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ （ε 为任意小正数），取外侧.

则 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma^*}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（利用高斯公式）

$$=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi.$$

(20) (本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$,

（Ⅰ）求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\xi_1$， $\boldsymbol{A}^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任意向量 ξ_2,ξ_3 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 无关.

【分析】 （Ⅰ）解非齐次线性方程组，利用矩阵初等行变换将 $\overline{A}\to$ 阶梯形，然后利用 $A_{m\times n}x=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$ （其中 $\overline{A}=(A\,|\,b)$）进行判定并求解.（Ⅱ）可利用 $\left|\xi_1,\xi_2,\xi_3\right|\neq0$ 或向量组线性无关的定义证明.

【详解】（Ⅰ） $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

于是$r\left(\boldsymbol{A}\right)=r\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)=2$，取$x_2$为自由变量，可得

$$x_3=-2x_2+1,\quad x_1=-x_2.$$

所以$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-x_2\\x_2\\-2x_2+1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，（$x_2=k$ 为任意常数）.

设$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$，则

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是$r\left(\boldsymbol{B}\right)=r\left(\overline{\boldsymbol{B}}\right)=1$，取$x_2,x_3$为自由变量，则$x_1=-x_2-\frac{1}{2}$，所以

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-x_2-\frac{1}{2}\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$$

（其中$x_2=k_2,x_3=k_3$为任意常数）.

（II）**证法 1**　由（I）知

$$\left|\xi_1,\xi_2,\xi_3\right|=\begin{vmatrix}-1&-k&-k_2-\frac{1}{2}\\1&k&k_2\\-2&-2k+1&k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-k&-k_2-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{1}{2}\\0&-1&k_3+2k_2+1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq0,$$

所以ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关.

证法 2　由题设可得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0}$.设存在数$k_1,k_2,k_3$，使得

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0},\qquad ①$$

等式两端左乘$\boldsymbol{A}$，得

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0}，即\ k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{0}，即$$

$$k_2\boldsymbol{\xi}_1+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}. \qquad ②$$

等式两端再左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}$，即 $k_3\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，于是 $k_3=0$，代入②式得 $k_2\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，

故 $k_2=0$.将 $k_2=k_3=0$ 代入①式可得 $k_1=0$，从而 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关

【评注】本题为基础题型.

类似例题见 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 2 篇第 4 章【例 4.7】;《考研数学精题 660》（2.37）.

（21） **(**本题满分 11 分)

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$，

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

【分析】（Ⅰ）先写出二次型 f 的矩阵，然后利用 $\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=0$ 求解.

（Ⅱ）由 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$ 可知正惯性指数为 2，即可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有两个大于零，一个为零，然后可得 a 值.

【详解】由题设可知二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

由于 $\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-a & \lambda-a & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}$

$$=\left(\lambda-a\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=\left(\lambda-a\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ 0 & 2 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\lambda-a\right)\left[\left(\lambda-a\right)\left(\lambda-a+1\right)-2\right]$$

$$=\left(\lambda-a\right)\left[\lambda^2-\left(2a-1\right)\lambda+a^2-a-2\right]$$

$$=\left(\lambda-a\right)\left(\lambda-a+2\right)\left(\lambda-a-1\right).$$

于是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有的特征值为 $\lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1$.

（Ⅱ）若二次型 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$，则它的正惯性指数为 2. 于是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有两个大于零，一个为零.显然 $\lambda_3>\lambda_1>\lambda_2$，所以 $\lambda_2=a-2=0$，即 $a=2$.

【评注】二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}AX$ 的规范型若为

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2 \quad (p\le r\le n)\text{（唯一）}.$$

则 p（A 的大于 0 的特征值的个数）称为二次型的正惯性指数，r 称为二次型的秩，$r-p$（A 的小于 0 的特征值的个数）称为二次型的负惯性指数.

类似例题见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 6 讲【例 1】【例 2】；2009 版《数学复习指南》(理工类) 第 2 篇第 6 章【例 6.9】【例 6.10】;《考研数学精题 660》(2.90，2.94).

(22)　**(本题满分 11 分)**

袋中有 1 个红球，2 个黑球与 3 个白球，现有放回地从袋中取两次，每次取一个球. 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

（Ⅰ）求 $P\{X=1|Z=0\}$；

（Ⅱ）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

【分析】（Ⅰ）求条件概率，直接利用 $P\{X=1|Z=0\}=\dfrac{P\{X=1,Z=0\}}{P\{Z=0\}}$ 计算；

（Ⅱ）先确定 X,Y 的可能取值，然后逐个计算 X,Y 取每一对值的概率.

【详解】本题因为是有放回地取球，所以基本事件总数为 6^2.

（Ⅰ）$$P\{X=1|Z=0\}=\frac{P\{X=1,Z=0\}}{P\{Z=0\}}=\frac{2\dfrac{C_1^1C_2^1}{6^2}\cdot\dfrac{2}{6}}{\dfrac{C_3^1C_3^1}{6^2}}=\frac{4}{9}.$$

（Ⅱ）X,Y 的可能取值均为 0,1,2, 且

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_3^1\cdot C_3^1}{6^2}=\frac{9}{36},\quad P\{X=0,Y=1\}=\frac{2C_2^1\cdot C_3^1}{6^2}=\frac{12}{36},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{6^2}=\frac{4}{36},\quad P\{X=1,Y=0\}=\frac{2C_1^1\cdot C_3^1}{6^2}=\frac{6}{36},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{2C_1^1\cdot C_2^1}{6^2}=\frac{4}{36},\quad P\{X=1,Y=2\}=0,$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\frac{C_1^1\cdot C_1^1}{6^2}=\frac{1}{36},\quad P\{X=2,Y=1\}=0,P\{X=2,Y=2\}=0.$$

所以二维随机变量 $f(x,y)$ 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

【评注】本题为基础题型. 古典概型概率计算公式如下：

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

类似例题见文登暑期强化班笔记《概率论与数理统计》第 1 讲【例 7】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 3 篇第 2 章【例 2.31】【例 2.36】；完全类似例题见《考研数学精题 660》（3.45）.

（23）　**(本题满分 11 分)**

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）求参数 λ 的矩估计量；

（Ⅱ）求参数 λ 的最大似然估计量.

【分析】本题考查点估计，分别按两种估计法计算 λ 的相应估计量.

【详解】（Ⅰ）由 $EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=-\lambda x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+2\lambda\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$

$$=-2x\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{\lambda}.$$

令 $EX=\overline{X}$，即 $\overline{X}=\dfrac{2}{\lambda}$，得参数 λ 的矩估计量为 $\widehat{\lambda}_1=\dfrac{2}{\overline{X}}$.

（Ⅱ）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\left(x_i>0,i=1,2,\cdots,n\right)$ 为样本观测值，则似然函数为

$$L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x_i;\lambda\right)=\prod_{i=1}^{n}\lambda^2x_i\mathrm{e}^{-\lambda x_i}=\lambda^{2n}\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i,$$

于是 $\ln L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda\right)=\ln\left(\lambda^{2n}\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i\right)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$.

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda}=\dfrac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，得 $\lambda=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$. 故参数 λ 的最大似然估计量为 $\widehat{\lambda}_2=\dfrac{2}{\overline{X}}$.

【评注】本题为基础题型，要熟练掌握总体未知参数的两种点估计法：矩估计法和最大似然估计法.

完全相同例题见《考研数学精题 660》(3.136)．

类似例题见文登暑期强化班笔记《概率论与数理统计》第 6 讲【例 5】；2009 版《数学复习指南》(理工类) 第 3 篇第 6 章【例 6.1】【例 6.4】【例 6.6】．