浙江科技学院第二届高等数学竞赛试题及参考答案

2006 年 9 月 23 日

1．设 $f(x)$ 在 $x=12$ 的邻域内为可导函数，且 $\lim\limits_{x\to 12} f(x)=0, \lim\limits_{x\to 12} f'(x)=1003$，

求极限 $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\int_{12}^{x}\left[t\int_{t}^{12} f(u)du\right]dt}{(12-x)^3}$。

解： $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\int_{12}^{x}\left[t\int_{t}^{12} f(u)du\right]dt}{(12-x)^3}=\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{x\int_{x}^{12} f(u)du}{-3\cdot(12-x)^2}=\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\int_{x}^{12} f(u)du-xf(x)}{6\cdot(12-x)}$

$=\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{-f(x)-f(x)-xf(x)}{-6}=\dfrac{1}{6}\times 12\times 1003=2006$

2．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，反函数为 $g(x)$ 且 $\int_0^{f(x)} g(t)dt=x^2e^x$，求 $f(x)$。

解：两边对 x 求导得，$g\left[f(x)\right]f'(x)=2xe^x+x^2e^x$，$xf'(x)=2xe^x+x^2e^x$，

所以 $f'(x)=2e^x+xe^x$，解得，$f(x)=(x+1)e^x+C$，

由 $f(0)=0$ 可推得，$C=-1$，所以 $f(x)=(x+1)e^x-1$。

3．计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\left\{x^2,y^2\right\}}dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$。

解：设 $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le x\right\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,x\le y\le 1\}$

则 $\iint\limits_D e^{\max\left\{x^2,y^2\right\}}dxdy=\iint\limits_{D_1} e^{\max\left\{x^2,y^2\right\}}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{\max\left\{x^2,y^2\right\}}dxdy$

$=\iint\limits_{D_1} e^{x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy+\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx$

$=2\int_0^1 xe^{x^2}dx=e-1$

4．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域和和函数 $S(x)$。

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(-1)^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}}\right|=x^2$，所以当 $x^2<1$ 时，原级数绝对收敛，

当 $x^2>1$ 时，原级数发散，因此原级数的收敛半径为 1，

端点 $x=1,-1$ 处显然收敛，所以收敛域为 $[-1,1]$。

记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n(2n-1)}\left(x\in(-1,1)\right)$，则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}\left(x\in(-1,1)\right)$，

$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}\left(x\in(-1,1)\right)$，

由于 $S(0)=0,S'(0)=0$，所以 $S'(x)=\int_0^x S''(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$，

$S(x)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\arctan t dt=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=2xS(x)=2x(x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2))\ \left(x\in[-1,1]\right)$

5．设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），

求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解：由题设知 $f(0)=0,\varphi(0)=0$，令 $u=xt$，得 $\varphi(x)=\frac{\int_0^x f(u)du}{x}\left(x\neq 0\right)$，

从而 $\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\left(x\neq 0\right)$。

又 $\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$。

由于 $\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$，

因此 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的。

6．设函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 有界且导数连续，

又对于任意的实数 x 有 $\left|f(x)+f'(x)\right|\le 1$，证明：$\left|f(x)\right|\le 1$。

证明：令 $F(x)=e^x f(x)$，则 $F'(x)=e^x\left[f(x)+f'(x)\right]$，得 $\left|F'(x)\right|\le e^x$，

即 $-e^x\le F'(x)\le e^x$，则 $-\int_{-\infty}^x e^x dx\le\int_{-\infty}^x F'(x)dx\le\int_{-\infty}^x e^x dx$，

即 $-e^x\le e^x f(x)-\lim_{x\to-\infty}e^x f(x)=e^x f(x)\le e^x$，

所以 $-1\le f(x)\le 1$，即 $\left|f(x)\right|\le 1$

7．设 $f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t dt$，其中 $x\ge 0, n$ 为正整数，试证明：

$$\max_{0\le x<+\infty} f(x)\le \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}。$$

解：$f(0)=0$，显然满足不等式。当 $x>0$ 时，$f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n} x\left(x>0\right)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_0=1$，$x_k=k\pi(k=1,2,\cdots)$

因为当 $x>1(x\ne k\pi)$ 时，$(x-x^2)<0$，$\sin^{2n} x>0$，所以在 x_k 的左右

两侧 $f'(x)<0$，因此 x_k 不是 $f(x)$ 的极值点；

又因为当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $1<x<\pi$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(1)$ 是极大值。

由极值的唯一性知，$\max\limits_{0<x<+\infty} f(x)=f(1)=\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n} t dt\le \int_0^1 (t-t^2)t^{2n} t dt$

$$=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}。$$

8．设 $f(x)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上连续，在 $\left(0,\pi\right)$ 内可导，

且 $\int_0^\pi f(x)\cos x dx=\int_0^\pi f(x)\sin x dx=0$。求证：存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=0$。

解：因为在 $\left(0,\pi\right)$ 内 $\sin x>0$，又已知 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx=0$，

若在 $\left(0,\pi\right)$ 内 $f(x)$ 恒正，则 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx>0$，

若在 $\left(0,\pi\right)$ 内 $f(x)$ 恒负，则 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx<0$，

说明在 $\left(0,\pi\right)$ 内 $f(x)$ 不可能恒正或恒负，因而 $f(x)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 内必有零点。

以下用反证法证明 $f(x)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 内零点不惟一。

设 $a\in\left(0,\pi\right)$ 是 $f(x)$ 的唯一零点，则 $x\ne a$ 且 $x\in\left(0,\pi\right)$ 时，有 $\sin(x-a)f(x)$ 必

恒正或恒负（否则 $f(x)$ 必另有零点），即 $\int_0^\pi f(x)\sin(x-a)dx\ne 0$。

但由已知，$\int_0^\pi f(x)\sin(x-a)dx=\int_0^\pi f(x)\left(\sin x\cos a-\cos x\sin a\right)dx$

$=\cos a\int_0^\pi f(x)\sin x dx-\sin a\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0$，

与上式矛盾，表明 $f(x)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 内零点的个数不止一个。于是由罗尔定理知，

在函数 $f(x)$ 的两个零点之间必然存在导函数的零点，

即存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=0$。

浙江科技学院第三届高等数学竞赛试题及参考答案

2007 年 9 月 23 日

1．计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}\sin t^2dt}{(1+x^2)^x-1}$。(10 分)

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}\sin t^2dt}{e^{x\ln(1+x^2)}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}\sin t^2dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x^2}{3x^2}=\dfrac{8}{3}$

2．设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2007}}{n^\alpha-(n-1)^\alpha}=\beta$ (β为非零实数)，求α及β的值。(10 分)

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2007}}{n^\alpha-(n-1)^\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2007-\alpha}}{1-(1-\frac{1}{n})^\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2007-\alpha}}{\alpha\cdot\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2007-\alpha}}{\alpha\cdot\frac{1}{n}}$

$=\dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{n\to\infty}n^{2008-\alpha}=\begin{cases}0,\ \alpha>2008\\ \dfrac{1}{\alpha},\ \alpha=2008\\ +\infty,\alpha<2008\end{cases}$，由题设条件$\alpha=2008$，$\beta=\dfrac{1}{2008}$。

3．证明：$\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1,\quad (p>1,0\le x\le 1)$。(10 分)

证：设 $f(x)=x^p+(1-x)^p\quad (0\le x\le 1)$，

令 $f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}=0$， 得驻点 $x=\dfrac{1}{2}$。

又 $f(0)=f(1)=1, f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^{p-1}$，所以 $f(x)$ 在$[0,1]$的最大值为 1，最小值为$(\frac{1}{2})^{p-1}$，

所以$\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1$……10 分

4．计算不定积分$\int\dfrac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}dx$。(10 分)

解：原式$=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)=-\dfrac{1}{2}\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\dfrac{1}{1+x^2}$

$=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

又$\int\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\dfrac{\sec^2 t}{\sec^3 t}dt=\int\cos tdt=\sin t+c=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c$，

从而$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$

5．设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且非负，且$f(x)\int_0^x f(x-t)dt=\sin^2 x$，

求$f(x)$在$[0,\pi]$上的平均值。(10 分)

解：令$F(x)=\int_0^x f(x-t)dt$，则$F(x)=\int_0^x f(u)du$，$F'(x)=f(x)$， 所求平均值为$\frac{F(\pi)}{\pi}$。

题设条件变形为$f(x)F(x)=\sin^2 x$，两边积分，得$\int f(x)F(x)dx=\int\sin^2 xdx$，

$\int F(x)dF(x)=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$，解得$F^2(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$，

又$F(0)=0$，所以$F^2(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x$，故$F^2(\pi)=\pi$，

又$f(x)\geq 0$，所以$F(\pi)=\sqrt{\pi}$，从而所求平均值为$\frac{F(\pi)}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$。

6．证明曲面$z=xf(\frac{y}{x})$上任一点的切平面都经过坐标原点。(10 分)

解：因为$\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\frac{y}{x})$，

设$P_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面上任意一点，则曲面在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程为：

$$[f(\frac{y_0}{x_0})-\frac{y_0}{x_0}f'(\frac{y_0}{x_0})](x-x_0)+f'(\frac{y_0}{x_0})(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

将原点坐标$(0,0,0)$代入切平面方程，得

$[f(\frac{y_0}{x_0})-\frac{y_0}{x_0}f'(\frac{y_0}{x_0})](-x_0)-f'(\frac{y_0}{x_0})y_0+z_0=0$方程成立，

故曲面$z=xf(\frac{y}{x})$上任一点的切平面都经过坐标原点。

7．计算二重积分$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}|y-x^2|\max\{x,y\}dxdy$。(10 分)

解：将积分区域分为三个区域D_1,D_2,D_3，其中D_1：$0\le x\le 1,x\le y\le 1$，

D_2：$0\le x\le 1,x^2\le y\le x$，$D_3$：$0\le x\le 1,0\le y\le x^2$，

从而$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}|y-x^2|\max\{x,y\}dxdy=\iint\limits_{D_1}(y-x^2)ydxdy+\iint\limits_{D_2}(y-x^2)xdxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2-y)xdxdy$

$$=\int_0^1dx\int_x^1(y^2-x^2y)dy+\int_0^1dx\int_{x^2}^x(xy-x^3)dy+\int_0^1dx\int_0^{x^2}(x^3-xy)dy=\frac{22}{120}+\frac{1}{120}+\frac{1}{12}=\frac{11}{40}。$$

8．计算曲线积分$\oint_L \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$，其中$L$为曲线$|x|+|y|=2$的正向。(10 分)

解：这里$P=\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$，$Q=-\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，$P,Q$

及其偏导数在L所围的闭区域上除点$(1,0)$外处处连续，在L所围的闭区域内以点

$(1,0)$为圆心，作一半径适当小的圆C $\begin{cases} x=1+R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$，并取其逆时针方向。

由格林公式$\oint_L \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}=\oint_C \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}=\frac{1}{R^2}\oint_C ydx-(x-1)dy$

$$=\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi}(-R^2\sin^2 t-R^2\cos^2 t)dt=-2\pi\text{。}$$

9．将函数$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x^2-x-2}$展开为$x$的幂级数。(10 分)

解： $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x^2-x-2}=\frac{x^2-x-2+3x}{x^2-x-2}=1+\frac{3x}{x^2-x-2}=1+\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+1}$

$$=1-\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{x+1}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1+\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n-\frac{1}{2^n}]x^n\text{，}|x|<1\text{。}$$

（或 $1+\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n-\frac{1}{2^n}]x^n$，$|x|<1$）

10．设数列$\{x_n\}=\{na_n\}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$均收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。(10 分)

证：令$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k-1})$，则$S_n=a_1-a_0+2a_2-2a_1+3a_3-3a_2+\cdots+na_n-na_{n-1}$

$$=-a_0-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1}+na_n=-\sum_{k=0}^{n-1}a_k+na_n\text{，}\quad\text{从而}\sum_{k=0}^{n-1}a_k=na_n-S_n\text{，}$$

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$收敛，所以$\{S_n\}$收敛，令$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，

又$\{x_n\}=\{na_n\}$收敛，令$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=A$，……8 分

因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}(na_n-S_n)=A-S$，所以级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$收敛，

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

浙江科技学院第四届高等数学竞赛试题及参考答案

2008 年 9 月 20 日

1、计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}$。(10 分)

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

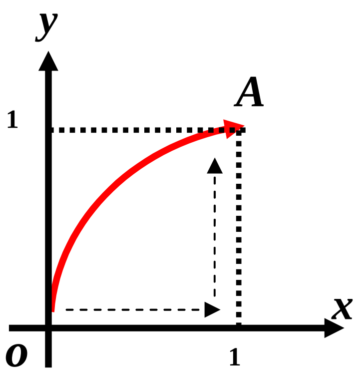
2、求不定积分 $\int\dfrac{x^9}{\sqrt{x^5+1}}dx$。(10 分)

解：$\int\dfrac{x^9}{\sqrt{x^5+1}}dx=\dfrac{1}{5}\int\dfrac{x^5}{\sqrt{x^5+1}}d(x^5+1)=\dfrac{1}{5}\int\dfrac{x^5+1-1}{\sqrt{x^5+1}}d(x^5+1)$

$=\dfrac{1}{5}\int(\sqrt{x^5+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x^5+1}})d(x^5+1)\quad=\dfrac{1}{5}[\dfrac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}-2(x^5+1)^{\frac{1}{2}}]+C$。

3、计算 $I=\int_L(x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$，其中 L 为

由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的曲线 $y=\sin(\dfrac{\pi}{2}x)$。(10 分)



解: 由 $I=\int_L(x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$ 知

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)=2x$， $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4)=2x$，

故 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故 $I=\int_0^1x^2dx+\int_0^1(1+y^4)dy=\dfrac{23}{15}$

4、证明：(1) $e^x\geq 1+x,\ x\in R$； (7 分)

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，试证 $I=\int_0^1e^{f(x)}dx\int_0^1e^{-f(y)}dy\geq 1$。(8 分)

证：(1) 令 $g(x)=e^x-1-x,\ x\in R$， 则 $g'(x)=e^x-1$，

当 $x<0$ 时， $g'(x)<0$，当 $x>0$ 时， $g'(x)>0$，所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的最小值，

从而 $g(x)\geq g(0)=0,\ x\in R$，即 $e^x\geq 1+x,\ x\in R$ 成立。

(2) 解一：$I=\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(y)}dy=\iint\limits_D e^{f(x)-f(y)}dxdy$，$D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$，

由(1)知 $I=\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(y)}dy\ge\iint\limits_D (f(x)-f(y)+1)dxdy$

$=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 dy-\int_0^1 f(y)dy\int_0^1 dx+\iint\limits_D dxdy=1$。

(2)解二： $2I=\iint\limits_D \frac{e^{f(x)}}{e^{f(y)}}dxdy+\iint\limits_D \frac{e^{f(y)}}{e^{f(x)}}dxdy=\iint\limits_D \frac{[e^{f(x)}]^2+[e^{f(y)}]^2}{e^{f(x)}\cdot e^{f(y)}}dxdy$

$\ge 2\iint\limits_D dxdy=2$，所以 $I\ge 1$。

5、证明：若 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，则曲面 $S:F(nx-lz,ny-mz)=0$ 上

任意一点的切平面都平行于直线 $L:\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$。 (12 分)

证明：曲面 S 上任意一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面的法向量为：

$\vec{n}=\left\{nF_u',\ nF_v',\ -lF_u'-mF_v'\right\}\Big|_{P_0}$，直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\{l,\ m,\ n\}$，

因为 $\vec{n}\cdot\vec{s}=lnF_u'+mnF_v'-nlF_u'-nmF_v'\equiv 0$，所以 $\vec{n}\perp\vec{s}$

因此曲面 S 上任意一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面都平行于直线 L。

6、已知 $y=\arcsin x$，(1) 证明 $(1-x^2)y''-xy'=0$ ； (7 分)

(2) 求 $y^{(n)}(0)$。 (8 分)

(1) $\because\ y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$， $y''=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$，$\therefore\ (1-x^2)y''-xy'=0$

(2) 在(1)中的等式两边求 n 阶导数，并用莱布尼茨公式得

$[(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}]-[xy^{(n+1)}+ny^{(n)}]=0,\ (n\ge 0)$

令 $x=0$，得 $y^{(n+2)}\big|_{x=0}=n^2y^{(n)}\big|_{x=0}$，利用此递推公式及 $y'\big|_{x=0}=1,\ y''\big|_{x=0}=0$ 得

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m\\ [(2m-1)!!]^2, & n=2m+1\end{cases}$$

7、设有两抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，记它们交点横坐标的绝对值为 x_n，(1)求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 s_n；(8 分)

(2)求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{x_n}$ 的和。(8 分)

解：(1) 两抛物线交点横坐标的绝对值为 $x_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$， 由对称性，

$$s_n=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}[nx^2+\frac{1}{n}-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}]dx=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}[\frac{1}{n(n+1)}-x^2]dx=\frac{4}{3}\frac{1}{[n(n+1)]^{\frac{3}{2}}}$$ 。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{x_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}[1-\frac{1}{n+1}]=\frac{4}{3}$

8、证明：若在 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)$ 为连续函数，且对任何 $a>0$ 均有

$g(x)=\int_x^{ax}f(t)dt\equiv$ 常数， $x\in(0,+\infty)$。则 $f(x)=\frac{c}{x},x\in(0,+\infty)$，$c$ 为常数。(12 分)

证：由题设知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $g'(x)=af(ax)-f(x)=0$，

于是，对于任何 $a>0$ 有 $f(x)=af(ax)$， $x\in(0,+\infty)$，

特别地对任一 $x>0$，令 $a=\frac{1}{x}$，则有 $f(x)=\frac{1}{x}f(1)=\frac{c}{x}$，这里 $c=f(1)$ 为常数。

浙江科技学院第五届高等数学竞赛试题及参考答案

2009 年 9 月 26 日

1．计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2^x-1}{x})^{\frac{1}{x}}$ （10 分）

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2^x-1}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{2^x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{2^x-1}{x}}\quad=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2^x-1)-\ln x}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2^x\ln2}{2^x-1}-\frac{1}{x})}\quad=e^{\ln 2}=2$.

2．设 $g(x)$ 有连续的二阶导数，当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)=\int_0^x(x^2-t^2)g''(t)dt$ 的导数与 x^2 是等价无穷小，求 $g''(0)$.　（10 分）

解　由条件得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=1$， $f(x)=x^2\int_0^x g''(t)dt-\int_0^x t^2g''(t)dt$ ，

$$f'(x)=2x\int_0^x g''(t)dt+x^2g''(x)-x^2g''(x)=2x\int_0^x g''(t)dt$$

所以 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\int_0^x g''(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2g''(x)}{1}=2g''(0)$，故 $g''(0)=\dfrac{1}{2}$.

3. 计算积分 $\int\dfrac{x^5-x}{x^8+1}dx$ （10 分）

解　令 $t=x^2$，则 $\int\dfrac{x^5-x}{x^8+1}dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{t^2-1}{t^4+1}dt\quad=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1-t^{-2}}{t^2+t^{-2}}dt$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t+t^{-1})^2-2}d(t+t^{-1})=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|\frac{t+t^{-1}-\sqrt{2}}{t+t^{-1}+\sqrt{2}}|+c=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}|+c$$

4. 证明：当 $x>0$ 时， $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ （15 分）

证一 令 $f(x)=x-\dfrac{x^3}{6}-\sin x$，则 $f'(x)=1-\dfrac{x^2}{2}-\cos x$， $f''(x)=\sin x-x$，

当 $x>0$ 时，恒有 $\sin x<x$，故当 $x>0$ 时， $f''(x)=\sin x-x<0$，因此 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少．所以当 $x>0$ 时， $f'(x)<f'(0)=0$，因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上

单调减少．从而当 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$，即 $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x$

令 $g(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\sin x$，$g'(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\cos x$，

$$g''(x)=-x+\frac{x^3}{6}+\sin x=-f(x)$$

由前述证明可知，当 $x>0$ 时，$g''(x)=-f(x)>0$，所以 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，从而当 $x>0$ 时，$g'(x)>g'(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加

因此，当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，即 $\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$

即当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$

证二 当 $x>0$ 时，恒有 $\sin x<x$，

上式两边在 $[0,x]$ 上积分，$\int_0^x \sin x dx<\int_0^x x dx$，得 $1-\cos x<\dfrac{1}{2}x^2$

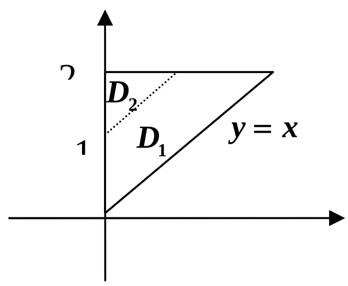
两边继续积分得 $x-\sin x<\dfrac{1}{6}x^3$，即 $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x$

两边继续积分得 $\int_0^x (x-\dfrac{1}{6}x^3)dx<\int_0^x \sin x dx$，即 $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{24}x^4<1-\cos x$

两边再积分一次得 $\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{120}x^5<x-\sin x$，即 $\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$

故当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$

5. 计算 $I=\iint\limits_D [y-x+1]d\sigma$，其中 D：由直线 $x=0, y=2$ 和 $y=x$ 围成，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．(10 分)



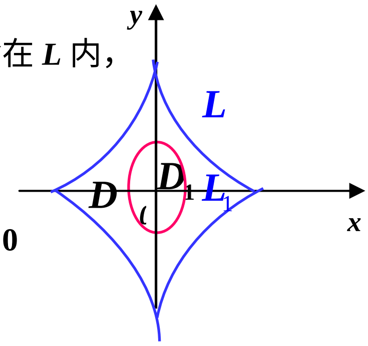
解 在 D 上，$1\le y-x+1\le 3$，如图 $D=D_1+D_2$

$$I=\iint\limits_{D_1}[y-x+1]d\sigma+\iint\limits_{D_2}[y-x+1]d\sigma$$

$$=\iint_{D_1}d\sigma+2\iint_{D_2}d\sigma\ =\iint_{D}d\sigma+\iint_{D_2}d\sigma=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

6. 计算 $I=\oint_L\dfrac{ydx-xdy}{2x^2+y^2}$，其中 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$ 沿逆时针方向．(15 分)

解 记 $P=\dfrac{y}{2x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{-x}{2x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{2x^2-y^2}{(2x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x^2+y^2\neq 0)$



作椭圆 $L_1:2x^2+y^2=r^2(r>0)$（取逆时针方向）并使 L_1 含在 L 内，

记 L 与 L_1 所围的复连通区域为 D，由格林公式得

$$I=\oint_{L+L_1^-}\frac{ydx-xdy}{2x^2+y^2}=0，\text{即}\ \oint_L\frac{ydx-xdy}{2x^2+y^2}+\oint_{L_1^-}\frac{ydx-xdy}{2x^2+y^2}=0$$

故 $$\oint_L\frac{ydx-xdy}{2x^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{ydx-xdy}{2x^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{L_1}ydx-xdy$$

$$\overset{\text{Green公式}}{=}-\frac{1}{r^2}\iint_{D_1}2dxdy\ \ (D_1\text{为}L_1\text{所围的区域})=-\sqrt{2}\pi$$

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$．(15 分)

证明 由条件知，在 $[0,1]$ 上，$f(x)$ 满足罗尔定理的条件，

故必存在 $x_0\in(0,1)$，使 $f'(x_0)=0$

令 $G(x)=(1-x)^2f'(x)$，有 $G(x_0)=G(1)=0$，在 $[x_0,1]$ 上，$G(x)$ 满足

罗尔定理的条件， 故必存在 $\xi\in(x_0,1)\subset(0,1)$，使 $G'(\xi)=0$

又 $G'(x)=(1-x)^2f''(x)-2(1-x)f'(x)$，

故 $(1-\xi)^2f''(\xi)-2(1-\xi)f'(\xi)=0$， 因为 $1-\xi\neq 0$，

所以有 $(1-\xi)f''(\xi)-2f'(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

8. 设 $u_1=2,\ u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{1}{u_n})$，证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在；(2)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)$ 收敛．**(15 分)**

证明 （1） $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{1}{u_n})\ge 1$，又 $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{1}{u_n})\le\frac{1}{2}(u_n+u_n)=u_n$

所以数列 $\{u_n\}$ 单调递减且有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在.

（2） 由（1）可设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ ， 且 $\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\ge 0$

又 $\frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\frac{u_n-u_{n+1}}{u_{n+1}}\le u_n-u_{n+1}$ ①

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$ 的前 n 项和 $S_n=(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+\cdots+(u_n-u_{n+1})=u_1-u_{n+1}$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(u_1-u_{n+1})=u_1-a$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$ 收敛，由① 式及由比较审敛法，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)$ 收敛.