2010 年研究生入学考试数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为

（A） 0　（B） 1　（C）2　（D） 3　[　　]

【分析】先写出函数的无定义点，然后根据间断点定义判断。

【详解】显然函数 $f(x)$ 在 $x=0, x=\pm 1$ 无定义.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\infty。$$

所以 $f(x)$ 的无穷间断点的个数为 1，故选（B）。

【评注】本题求函数的无穷间断点，为基础题型。

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 1 讲【例 4】【例 5】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 1 章【例 1.39】，精选习题一第 3 小题（4）；《考研数学核心题型》第 1 篇第 1 章【例 43】，【例 44】.

（2）设 y_1, y_2 为一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 为该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 为该方程对应齐次方程的解，则

（A） $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$　　（B） $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$

（C） $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$　　（D） $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$　　[　　]

【分析】利用微分方程解的性质求解即可。

【详解】因为 y_1, y_2 为一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,所以

$$y_1'+p(x)y_1=q(x),\ y_2'+p(x)y_2=q(x).\quad (*)$$

$\lambda y_1+\mu y_2$ 为该方程的解,则

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

将(*)代入上式可得 $\lambda+\mu=1$　　(**)

$\lambda y_1-\mu y_2$ 为该方程对应齐次方程的解,则

$$\left(\lambda y_1-\mu y_2\right)'+p\left(x\right)\left(\lambda y_1-\mu y_2\right)=0$$

将(*)代入上式可得 $\lambda-\mu=0$.　　　(***)

由(**)和(***)可得 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$,故选(A).

【评注】设 $x_1,\cdots,x_s$ 为 $Ax=b$ 的解，则对于常数 $k_1,\cdots,k_s$，

① 若 $k_1+\cdots+k_s=1$，则 $k_1x_1+\cdots+k_sx_s$ 为 $Ax=b$ 的解；

② 若 $k_1+\cdots+k_s=0$，则 $k_1x_1+\cdots+k_sx_s$ 为 $Ax=0$ 的解.

类似例题见 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 5 章【例 5.17】；《考研数学基础讲义》（理工类）第 1 篇第 11 章【例 11.9】.

（3）曲线 $y=x^2$ 与 $y=a\ln x\left(a\neq 0\right)$ 相切，则 $a=$

（A） 4e　　（B） 3e　（C） 2e　（D） e　　[　　]

【分析】由两曲线相切可得两曲线在切点的导数相同，且切点满足两曲线方程。

【详解】设切点为 $\left(x_0,y_0\right)$,则 $\left(x_0,y_0\right)$ 满足

$$\begin{cases} y_0=x_0^2 \\ y_0=a\ln x_0 \\ 2x_0=\dfrac{a}{x_0} \end{cases}\Rightarrow a=2\mathrm{e},\text{故选(C).}$$

【评注】本题已知两曲线相切，求曲线方程中的常数。本题为基础题型。

（4）设 m,n 均是正整数,则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2\left(1-x\right)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性

（A）仅与 m 的取值有关　　（B）仅与 n 的取值有关

（C）与 m,n 的取值都有关　　（D）与 m,n 的取值都无关　　[　　]

【分析】因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2\left(1-x\right)}}{\sqrt[n]{x}}$ 不存在，所以 $x=1$ 为瑕点。而 $x=0$ 是否为瑕点，要看

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2\left(1-x\right)}}{\sqrt[n]{x}}$ 是否存在。

【详解】 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$

因为 $x \to 0$ 时，$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \sim x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}}$，因为 m,n 是正整数，所以 $\frac{2}{m}-\frac{1}{n} > -1$，

若 $\frac{2}{m}-\frac{1}{n} < 0$，则 $x=0$ 为瑕点，则一定存在常数 p 满足 $0 < \left|\frac{2}{m}-\frac{1}{n}\right| < p < 1$，

使得

$$\lim_{x\to 0^+} x^p \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = \lim_{x\to 0^+} x^{p+\frac{2}{m}-\frac{1}{n}} = 0,$$

于是 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛。

下面考虑反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$，

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2m}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\sqrt[m]{(1-x)^{\frac{1}{2}}\ln^2(1-x)}}{1} = 0$，

而 $0 < \frac{1}{2m} < 1$，所以 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，

故反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性与 m,n 都无关，即选（D)。

【评注】对瑕点为 $x=b$ 的瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，且 $f(x)\ge 0$，有如下判敛准则：

① 若 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x) = k,\ 0\le k < +\infty,\ 0 < m < 1$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

② 若 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x) = k,\ 0 < k \le +\infty,\ m \ge 1$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

本题超纲．相关判敛准则可见各教材。

（5）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2' \ne 0$,则

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} =$

（A） x　　（B） z　　（C） $-x$　　（D） $-z$　　[　　]

【分析】利用隐函数求导法计算。

【详解】$F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$两边对$x$求导得

$$F_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\frac{z}{x^2}+\frac{z_x'}{x}\right)=0\Rightarrow z_x'=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}\ ;$$

$F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$两边对$y$求导得

$$F_1'\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+F_2'\left(\frac{z_y'}{x}\right)=0\Rightarrow z_y'=-\frac{F_1'}{F_2'}。$$

故$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$，即选（B）。

【评注】本题求多元隐函数的偏导数，由题设可知，z为因变量，x,y为自变量，为基本题型。

完全类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 9 讲【例 11】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 9 章【例 9.26】；《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 9 章【例 17】.

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

（A）$\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　（B）$\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

（C）$\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　（D）$\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　[　　]

【分析】本题利用定积分的极限定义即得。

【详解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(n+i)}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n^2+j^2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy$$

$=\int_0^1 dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$，故选（D）。

【评注】定积分是利用和式极限定义的，反过来，某些和式极限可利用定积分表示。

若每项提出$\dfrac{b-a}{n}$或$\dfrac{1}{n}$后，n项和可写成$\sum_{i=1}^{n} f\left[a+\dfrac{i(b-a)}{n}\right]$或$\sum_{i=1}^{n} f(\dfrac{1}{n})$的形式，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x，特别\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x。$$

类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 1 讲【例 26】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 1 章【例 1.18】；《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 1 章【例 34】【例 35】

（7）设向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组（Ⅱ）$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则

（A）若向量组（Ⅰ）线性无关，则 $r\le s$　　（B）若向量组（Ⅰ）线性相关，则$r>s$
（C）若向量组（Ⅱ）线性无关，则 $r\le s$　　（D）若向量组（Ⅱ）线性相关，则$r>s$

[　　]

【分析】利用向量组的秩的相关结论即可。

【详解】向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组（Ⅱ）$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则

$$r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)\le r\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right)\le s，$$

对选项（A)，若向量组（Ⅰ）线性无关，则$r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)=r$，

故$r\le s$，即选（A）

【评注】本题考查向量组的线性相关性，为基础题型。

“$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，且$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表出，则$s\le t$”是一个常用的结论，需熟记。

完全类似例题见《考研数学核心题型》（理工类）第 2 篇第 16 章【例 15（5)】.

（8）设A为 4 阶实对称矩阵,且$A^2+A=O$,若A的秩为 3 ,则A相似于

（A）$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$　[　　]

【分析】实对称矩阵可相似于由其特征值组成的对角阵，所以本题的关键是求出其特征值。

【详解】因为A为 4 阶实对称矩阵，所以A必可相似对角化，且A的特征值全为实数。

设 λ 为 A 的特征值，则 $\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0,\lambda=-1$。又 A 的秩为 3，则 A 的特征值为 $-1,-1,-1,0$，故选（D）。

【评注】 本题综合考查了实对称矩阵可相似对角化，特征值的性质和矩阵的秩等多个知识点。

完全类似例题见《考研数学核心题型》（理工类）第 2 篇第 18 章【例 3】；类似例题见文登暑期强化班讲义《线性代数》第 5 讲【例 14】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 2 篇第 5 章【例 5.3】.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（9）3 阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为__________.

【分析】利用特征根与方程的通解之间的关系求解即可。

【详解】对应的特征方程为 $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=2,\lambda=\pm i$,故通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

【评注】本题求 3 阶常系数线性齐次微分方程的通解，为基础题型。需熟记常系数齐次微分方程（*）的特征根与方程的通解之间的关系。

完全类似例题见《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 7 章【例 17】；类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 7 讲【例 11】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 5 章【例 5.14】，精选习题七第 8 小题.

（10）曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为__________.

【分析】按渐近线的定义求解。

【详解】 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1}=\infty$，所以曲线无水平渐近线；显然曲线无垂直渐近线。

又 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x\left(x^2+1\right)}=2$,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2+1}=0,$$

所以所求渐近线方程为 $y=2x$

【评注】本题求曲线的渐近线，为基础题型。

完全类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 6 讲【例 11】,【例 12】；《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 6 章【例 13】,【例 15】； 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 6 章【例 6.31】.

（11）函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________.

【分析】本题求函数在一点的高阶导数。可利用递推式求解。

【详解】 $y'=\dfrac{(-1)2}{1-2x}, y''=\dfrac{(-1)2^2}{(1-2x)^2}, y'''=\dfrac{(-1)2^3\cdot 2}{(1-2x)^3}, y^{(4)}=\dfrac{(-1)2^4\cdot 2\cdot 3}{(1-2x)^4}$,

依此类推,得 $y^{(n)}=\dfrac{(-1)2^n\cdot(n-1)!}{(1-2x)^n}$,所以 $y^{(n)}(0)=-2^n\cdot(n-1)!$

【评注】本题还可用函数的麦克劳林展开式求解，如下：

$y=\ln(1-2x)$ 的麦克劳林展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{n}\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

又当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，$\ln(1-2x)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}}{n+1}x^{n+1}$，比较 x^n 的系数可得

$$y^{(n)}(0)=-2^n\cdot(n-1)!。$$

完全类似例题见《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 2 章【例 34】,【例 35】； 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 2 章【例 2.23】.

（12）当 $0\le\theta\le\pi$ 时，对数螺线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 的弧长为________

【分析】直接利用曲线方程为 $\rho=\rho(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$ 的弧长计算公式

$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$ 求解即得。

【详解】 $l=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{\mathrm{e}^{2\theta}+\mathrm{e}^{2\theta}}\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\theta}\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)$

【评注】本题为极坐标表示的曲线的弧长，为基础题型。

求解公式见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 6 讲第 8 节；完全类似例题见《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 6 章【例 41】；类似例题见 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 6 章【6.45】.

（13）已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速率增加，宽 w 以 3cm/s 的速率增加，则当 $l=12cm, w=5cm$ 时，它的对角线增加的速率为________ .

【分析】先写出对角线的表达式，则它的增加速率即它的导数。

【详解】设 $l=x(t), w=y(t)$，则长方形的对角线为 $S(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$，则

$$S'(t)=\frac{x'(t)x(t)+y'(t)y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}。$$

当 $l=12cm, w=5cm$ 时，$S(t)=13$，于是

$$S'(t)\Big|_{l=12cm,w=5cm}=\frac{x'(t)x(t)+y'(t)y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}\Big|_{l=12cm,w=5cm}=\frac{12\cdot 2+5\cdot 3}{13}=3\text{ cm/s},$$

故所求对角线增加的速率为 3 cm/s。

【评注】本题实质求复合函数在某点的全导数,为基础题型.

（14）设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$__________ .

【分析】利用 $|AB|=|A||B|$（A,B 为同阶矩阵）等性质求解即可。

【详解】$|A+B^{-1}||B|=|AB+E|,|A||A^{-1}+B|=|AB+E|$,所以

$$|A||A^{-1}+B|=|A+B^{-1}||B|\Rightarrow 3\times 2=|A+B^{-1}|\times 2\Rightarrow |A+B^{-1}|=3.$$

【评注】本题求矩阵的行列式，为基础题型。

完全类似例题见《考研数学核心题型》（理工类）第 2 篇第 15 章【例 14】；类似例题见 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 2 篇第 2 章【2.12】.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15） (本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

【分析】先求出 $f'(x)$ 的零点，用所求的点将 $f(x)$ 得定义域分为若干个子区间，然后列表判断每个子区间内 $f'(x)$ 的符号即可。

【详解】所给函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

$$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt,$$ 于是

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt,$$

令 $f'(x)=0\Rightarrow x=0,x=\pm1$。

以 $x=0,x=\pm1$ 为分隔点列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+

$f(x)$	单调下降	极小值	单调上升	极大值	单调下降	极小值	单调上升

综上，$f(x)$ 的单调减少区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$；单调增加区间为 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$。

$f(x)$ 在 $x=\pm1$ 取得极小值 $f(\pm1)=0$；$f(x)$ 在 $x=0$ 取得极大值 $f(0)=\int_1^0(0-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\Big|_1^0=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$。

【评注】本题为基础题型。确定函数的极值和单调增减区间的步骤为：

(1)　确定函数的定义域；
(2)　找出使函数一阶导数为零或不存在的点；
(3)　以（2）中所求的点为分隔点将定义域分为若干个子区间；
(4)　利用各个子区间内 $f'(x)$ 的符号即得。

类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 6 讲【例 2】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 6 章【例 6.8】，【例 6.12】；《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 6 章【例 2】.

（16）(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由.

(Ⅱ)记 $u_n=\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

【分析】由定积分比较定理，两个积分的大小的比较可转化为被积函数大小的比较.

【详解】(Ⅰ)令 $f(t)=\left[\ln(1+t)\right]^n-t^n\,(0\le t\le1)$,

当 $n=1$ 时，$f'(t)=\frac{1}{1+t}-1<0$,所以 $f(t)=\ln(1+t)-t<f(0)=0$,

即有 $0\le\ln(1+t)\le t$,从而有 $0\le\left[\ln(1+t)\right]^n\le t^n\,(0\le t\le1)$

所以 $f(t)=\left[\ln(1+t)\right]^n-t^n<0$,即有

$$|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n<t^n|\ln t|,$$

故 $\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t\,(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅱ) $0\le u_n=\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n\mathrm{d}t\le\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t$,又

$$\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t=-\int_0^1\ln t\cdot t^n\mathrm{d}t=-\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1 t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2(n+1)}\to0\,(n\to\infty),$$

所以由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

【评注】在考试中，(Ⅱ) 的计算常常要借助(Ⅰ)的结果。

类似例题见《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 4 章【例 4】；

相关结论见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 5 讲和 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 3 章.

（17） **(**本题满分 11 分)

设函数$y=f\left(x\right)$由$\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi\left(t\right)\end{cases}\left(t>-1\right)$所确定，其中$\psi\left(t\right)$具有 2 阶导数，

且 $\psi\left(1\right)=\dfrac{5}{2},\psi'\left(1\right)=6$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4\left(1+t\right)}$，求函数$\psi\left(t\right)$。

【分析】根据参数方程的求导公式和已知条件联立建立微分方程，然后求解即得。

【详解】 $\begin{cases}x'=2+2t\\ y=\psi'\left(t\right)\end{cases}$，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'\left(t\right)}{2+2t},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''\left(t\right)\left(2+2t\right)-2\psi'\left(t\right)}{\left(2+2t\right)^3},$$

又$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4\left(1+t\right)}$，所以

$$\frac{3}{4\left(1+t\right)}=\frac{\psi''\left(t\right)\left(2+2t\right)-2\psi'\left(t\right)}{\left(2+2t\right)^3},$$

即$\dfrac{\psi''\left(t\right)\left(1+t\right)-\psi'\left(t\right)}{\left(1+t\right)^2}=3$，即$\left[\dfrac{\psi'\left(t\right)}{1+t}\right]'=3$，两边积分得

$$\frac{\psi'\left(t\right)}{1+t}=3t+C_1\Rightarrow\psi'\left(t\right)=3t\left(1+t\right)+C_1\left(1+t\right),$$

两边再次积分得$\psi\left(t\right)=t^3+\dfrac{1}{2}\left(3+C_1\right)t^2+C_1t+C_2$。

将$\psi\left(1\right)=\dfrac{5}{2},\psi'\left(1\right)=6$代入上两式得$C_1=0,C_2=0$，于是

$$\psi\left(t\right)=t^3+\frac{3}{2}t^2。$$

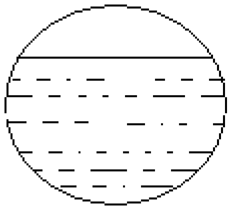
【评注】本题求函数方程。综合考查了参数的方程的一阶、二阶导数，微分方程的求解.

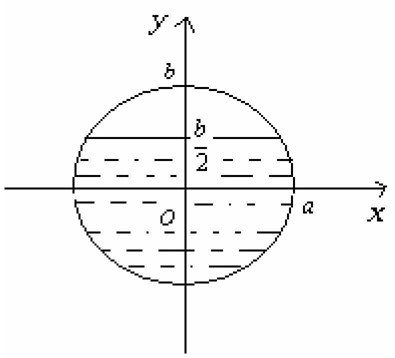
类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 8 讲【例 8】;《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 13 章【例 7】,【例 8】; 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 12 章【例 12.14】,【例 12.16】.

（18）（本题满分 10 分）

一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面为长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆，现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时（如图），计算油罐中油的质量。

（长度单位为 m；质量为 kg，油的密度为 $\rho\text{kg}/m^3$）





【分析】先建立如上图的坐标系，然后可写出油罐底面椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则图中阴影部分的面积 S 为整个椭圆的面积减去无阴影部分的面积，即可求得油罐中油的质量 $M=\rho Sl$。

【详解】由分析可得油罐中油的质量 $M=\rho Sl$。

$$S=S_{椭圆}-S_0=4\pi ab-S_0。$$

$$S_0=2\int_{\frac{b}{2}}^{b}a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}y=\frac{2a}{b}\int_{\frac{b}{2}}^{b}\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y\overset{y=b\sin t}{=}\frac{2a}{b}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}b^2\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=ab\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{ab\pi}{3}+\frac{ab}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{ab\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}ab}{4}。$$

于是 $S=\frac{2ab\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}ab$，$M=\rho Sl=\left(\frac{2ab\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}ab\right)\rho l$。

【评注】本题为微积分在物理中的应用题，实质考查平面图形面积的求解。

类似例题见《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 13 章【例 28】-【例 31】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 12 章【例 6.40，【例 6.43】.

相关公式见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 6 讲第 7 节。

（19）（本题满分 11 分)

设函数 $\mu=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $4\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}=0$，确定

a,b，使等式在变换 $\xi = x+ay, \eta = x+by$ 下化简为 $\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial\xi\partial\eta}=0$。

【分析】利用复合函数的链式法则计算。

【详解】 $\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=\dfrac{\partial\mu}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\dfrac{\partial\mu}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial x}=\dfrac{\partial\mu}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\mu}{\partial\eta}$，

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=a\frac{\partial\mu}{\partial\xi}+b\frac{\partial\mu}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2},\quad \frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+2ab\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi\partial\eta}+b^2\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi\partial\eta}+b\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2},$$

将以上式子代入 $4\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2\mu}{\partial y^2}=0$ 可得

$$4\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}\right)+12\left(a\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi\partial\eta}+b\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}\right)$$

$$+5\left(a^2\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi^2}+2ab\frac{\partial^2\mu}{\partial\xi\partial\eta}+b^2\frac{\partial^2\mu}{\partial\eta^2}\right)=0,$$

化简得 $\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\5b^2+12b+4=0\\12(a+b)+10ab+8\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{2}{5},\\b=-2\end{cases}\begin{cases}a=-2\\b=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$，（$\begin{cases}a=-\dfrac{2}{5}\\b=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$，$\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$ 舍去），

所以 $\begin{cases}a=-\dfrac{2}{5}\\b=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$。

【评注】本题实质要求函数的二阶偏导数和二阶混合偏导数。因为函数 $\mu=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，所以其二阶混合偏导数相等。

完全类似类似例题见《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 9 章【例 14】。

（20） **(**本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，

其中$D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$。

【分析】从积分域来看，用直角坐标会简便一些。

【详解】 $\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}\left(1-x^2+y^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x。$$

令$x=\sin t$，

则$\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$。

【评注】本题求二重积分。本题在计算过程中利用了以下结论：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot1 & n\text{是奇数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{是偶数}\end{cases}$$

类似例题见 2009 版《数学复习指南》(理工类) 第 1 篇第 10 章【例 10.2】.

（21） **(本题满分 10 分)**

设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$，证明：存在$\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

【分析】 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2\Leftrightarrow f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-\frac{1}{3}x^3\right]_{x=\xi}+\left[f(x)-\frac{1}{3}x^3\right]_{x=\eta}=0。$$

则可令$F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，分别在$\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right]$应用拉格朗日中值定理。

【详解】设$F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$,则$F(0)=0,F(1)=0$,且$F(x)$在闭区间$\left[0,\frac{1}{2}\right]$和$\left[\frac{1}{2},1\right]$

上连续，在开区间$\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},1\right)$可导，应用拉格朗日中值定理可得

$$\text{则} F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi),\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right), \qquad (1)$$

$$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta),\ \eta\in\left(\frac{1}{2},1\right) \qquad (2)$$

(1)+(2)得

$$F'(\xi)+F'(\eta)=0,\text{即 } f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0,\text{亦即}$$

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

【评注】对存在两个不同的点满足某个关系式的命题，一般利用观察法作辅助函数，利用两次拉格朗日中值定理或一次拉格朗日中值定理，一次柯西中值定理即可证得。

完全类似例题见《考研数学核心题型》(理工类) 第 1 篇第 5 章【例 21】;2009 版《数学复习指南》(理工类) 第 1 篇第 4 章【例 4.18】; 文登暑期强化班讲义《高等数学》第 4 讲【例 14】.

(22) (本题满分 11 分)

设$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$,

已知线性方程组$Ax=b$有两个不同的解,

(Ⅰ)求λ,a;(Ⅱ)求方程$Ax=b$的通解.

【分析】由“ 线性方程组$Ax=b$有两个不同的解 ”可得

非齐次线性方程组$Ax=b$有无数个解$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<3\Rightarrow|A|=0$。

【详解】线性方程组$Ax=b$有两个不同的解，则

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda=1\text{或}\lambda=-1\text{。}$$

当$\lambda=1$时，

$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]$，则$r(A)=2\neq 3=r(\overline{A})$，所以$\lambda=1$不成立。

当$\lambda=-1$时，

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\0&0&0&a+2\end{array}\right],$$

因为 $Ax=b$ 有解，所以 $a+2=0\Rightarrow a=-2$。

(Ⅰ)综上，$\lambda=-1,a=-2$。

(Ⅱ)原方程与以下方程组同解

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=-2\\-2x_2=1\end{cases}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+c\\-\frac{1}{2}\\c\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$，其中 c 为任意常数。

【评注】本题已知非齐次线性方程组解的情况，反求方程组中的参数，要想到利用解的判定定理求解。

$A_{m\times n}x=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A|b)=r(\overline{A})$，且

① $r(A)=r(\overline{A})=r=n\Leftrightarrow A_{m\times n}x=b$ 有唯一解；

② $r(A)=r(\overline{A})=r<n\Leftrightarrow A_{m\times n}x=b$ 有无穷多解.

类似例题见文登暑期强化班讲义《线性代数》第 4 讲【例 5】,【例 11】;2009 版《数学复习指南》(理工类)第 2 篇第 4 章【例 4.11】;《考研数学核心题型》(理工类)第 2 篇第 17 章【例 10】.

（23） (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{bmatrix}$，存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角阵，若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 a,Q。

【分析】由题设，$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 为 A 的属于特征值 λ_1 一个特征向量，则由

$\frac{1}{\sqrt{6}}A(1,2,1)^{\mathrm{T}}=\lambda_1\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 可得 λ_1,a；Q 的其他两列为其他特征值所对应的正交的单位特征向量，利用常规方法计算即可。

【详解】由题设 $\frac{1}{\sqrt{6}}A(1,2,1)^{\mathrm{T}}=\lambda_1\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，于是

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a = -1, \lambda_1 = 2 \text{。}$$

由于 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4),$$

所以 A 的特征值为 $2, 5, -4$。

属于特征值 5 的一个单位特征向量为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$；

属于特征值 -4 的一个单位特征向量为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$。

令 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，则有 $Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{bmatrix}$，故 Q 为所求矩阵。

【评注】因为正交矩阵 Q，使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角阵，则 Q 的列为 A 的特征向量。本题正是以此为切入点解出 a。

类似例题见文登暑期强化班讲义《线性代数》第 5 讲【例 12】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 2 篇第 5 章【例 5.23】；《考研数学核心题型》（理工类）第 2 篇第 18 章【例 14】.