浙江科技学院第十一届高等数学竞赛试题（2015.5.23）

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，且 $f'(0)=1$，又对于任意的 x,y 恒有

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，试求 $f'(x)$。 **（12 分）**

解：由 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，得 $f(0)=0$，从而有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，

所以 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)+2x\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}+2x=1+2x$。

2. 计算 $\iint\limits_D (x\cos y+\sin y)\,dxdy$，其中区域 D 由 $y=|x|$， $y=2|x|$ 及 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成。**（12 分）**

解： $\because$ 区域 D 关于 y 轴对称， $x\cos y$ 相对于 x 为奇函数，$\sin y$ 相对于 x 为偶函数，

$\therefore$ $\iint\limits_D x\cos y\,dxdy=0$， $\iint\limits_D \sin y\,dxdy=2\iint\limits_{D^+}\sin y\,dxdy$，其中 D^+ 为 D 在第 1 象限的部分，

从而 $\iint\limits_D (x\cos y+\sin y)\,dxdy=2\iint\limits_{D^+}\sin y\,dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\,dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\sin y\,dy$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\,d\cos y=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\,d\cos y=-y\cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y dy=1$。

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且满足 $\int_0^1 f(x+t)dt+x+1=f(x+1)-\int_0^x f(t)dt$，

求 $f(x)$ 的表达式。**（14 分）**

解：因为 $\int_0^1 f(x+t)dt=\int_x^{x+1}f(u)du$，所以有 $\int_x^{x+1}f(u)du+x+1=f(x+1)-\int_0^x f(u)du$，

上式两端关于 x 求导，得 $f(x+1)-f(x)+1=f'(x+1)-f(x)\Rightarrow f'(x+1)-f(x+1)=1$，

即 $f'(x)-f(x)=1$，解得 $f(x)=ce^x-1$，

由条件 $\int_0^1 f(x+t)dt+x+1=f(x+1)-\int_0^x f(t)dt$，令 $x=0$ 得 $\int_0^1 f(t)dt+1=f(1)$，

故有 $\int_0^1(ce^t-1)dt+1=ce-1$，解得 $c=1$，所以 $f(x)=e^x-1$。

4. 已知 $f(x)=x-\sqrt{2}\sin x-a$，其中 $a>0$。若 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内有且仅有一个零点，求 a 的取值范围。**（14 分）**

解： $f(x)=x-\sqrt{2}\sin x-a$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续， $f(0)=-a<0$， $f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}-a$。

令 $f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{4}$，

当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时， $f'(x)<0$；当 $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时， $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上单调减少，在 $[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调增加，

故当 $f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}-a\le 0$，即 $a\ge\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 无零点；

当 $f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}-a>0$，即 $0<a<\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 且仅有一个零点。

5. 设直线 L ：$\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a，b 的值。　**（12 分）**

解 1：平面 π 是过直线 L 且与曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,-2,5)$ 处相切的切平面。

故令其方程为 $x+y+b+\lambda(x+ay-z-3)=0$，即 $(1+\lambda)x+(1+a\lambda)y-\lambda z+b-3\lambda=0$。

又曲面在点 $(1,-2,5)$ 处的法向量 $\vec{n}=\{2,-4,-1\}$，故有 $\dfrac{1+\lambda}{2}=\dfrac{1+a\lambda}{-4}=\dfrac{-\lambda}{-1}$ 解得 $\lambda=1$，$a=-5$。

故平面 π 的方程为 $2x-4y-z+b-3=0$，又 π 过点 $(1,-2,5)$，所以 $b=-2$。

解 2：在点 $(1,-2,5)$ 处曲面 $z=x^2+y^2$ 的法向量 $\vec{n}=\{2,-4,-1\}$，

故曲面在点 $(1,-2,5)$ 处的切平面，即平面 π 的方程为 $2x-4y-z-5=0$，

直线 L 的方向向量 $\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix}=\{-1,1,a-1\}$，又直线 L 在平面 π 上，

所以 $\vec{n}\perp\vec{s}$，故 $\vec{n}\cdot\vec{s}=0$，所以 $2+4+a-1=0$，解得 $a=-5$

因为直线 L：$\begin{cases} x+y+b=0 \\ x-5y-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上，所以 L 上点的坐标 (x,y,z) 应满足平面 π 的方程，可以解得 $b=-2$。

6. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-2y^2}, \\ z=x, \end{cases}$ 起点为 $A(0,1,0)$，终点为 $B(0,-1,0)$，计算曲线积分 $I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$。**（12 分）**

解： 曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \\ z=\cos\theta, \end{cases}$　θ 从 $\dfrac{\pi}{2}$ 到 $-\dfrac{\pi}{2}$。

$$I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[-(\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta]d\theta=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{2}$$

7. 设在 $[0,1]$ 上有 $|f''(x)|\le M$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值，证明：$|f'(0)|+|f'(1)|\le M$。**（12 分）**

证：由题设条件，不妨设 $f(x)$ 在点 $x_0\in(0,1)$ 处取得最大值，则有 $f'(x_0)=0$，

在区间 $[0,x_0]$ 及 $[x_0,1]$ 上对 $f'(x)$ 分别应用拉格朗日定理，得

$f'(x_0)-f'(0)=f''(\xi_1)x_0$，$0<\xi_1<x_0$；$f'(1)-f'(x_0)=f''(\xi_2)(1-x_0)$，$x_0<\xi_2<1$，

又 $f'(x_0)=0$，所以 $f'(0)=-f''(\xi_1)x_0$，$f'(1)=f''(\xi_2)(1-x_0)$，

故有 $|f'(0)|+|f'(1)|=|f''(\xi_1)|x_0+|f''(\xi_2)|(1-x_0)\le Mx_0+M(1-x_0)=M$。

8.（1）**（小和山校区）** 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个领域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛。**（12 分）**

（1）证 1：由题设有 $f(0)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 的

某个领域内一阶泰勒公式为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2!}f''(\theta x)x^2=\dfrac{1}{2}f''(\theta x)x^2$，$(0<\theta<1)$

再由题设 $f''(x)$ 在包含于该领域内的某闭区间 $[-l,l]$ 上连续，故 $f''(x)$ 在 $[-l,l]$ 上有界，

即 $\exists M>0$，使 $|f''(x)|\le M$，$x\in[-l,l]$，

于是 $\forall x\in[-l,l]$ 有，$|f(x)|=\dfrac{1}{2}|f''(\theta x)x^2|\le\dfrac{1}{2}Mx^2$

取 $x=\dfrac{1}{n}$，当 n 充分大时，有 $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\le\dfrac{1}{2}M\cdot\dfrac{1}{n^2}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

证 2： 由题设有 $f(0)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=\dfrac{1}{2}f''(0)$，

从而，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|f(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}|f''(0)|$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由比较判定法，得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛。

（2）**（安吉校区）** 设正值函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减少，证明：

对于任意的 $0<\alpha<\beta<1$，均有 $\beta\int_0^{\alpha}f(u)du>\alpha\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du$ **（12 分）**

证 1： 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由积分中值定理，存在 $0<\xi_1<\alpha<\xi_2<\beta<1$，使得

$$\beta\int_0^{\alpha}f(u)du-\alpha\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du=\alpha\beta f(\xi_1)-\alpha(\beta-\alpha)f(\xi_2)=\alpha\beta[f(\xi_1)-f(\xi_2)]+\alpha^2 f(\xi_2)$$

又因为 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调减少的正值函数，从而有 $\beta\int_0^{\alpha}f(u)du-\alpha\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du>0$，

即有 $\beta\int_0^{\alpha}f(u)du>\alpha\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du$。

证 2： 设 $F(x)=x\int_0^{\alpha}f(u)du-\alpha\int_{\alpha}^{x}f(u)du$，$\alpha\le x\le\beta$

则 $F'(x)=\int_0^{\alpha}f(u)du-\alpha f(x)=\alpha f(\xi)-\alpha f(x)=\alpha[f(\xi)-f(x)]$，$0<\xi<\alpha\le x$

因为 $f(x)$ 单调减少，所以 $f(\xi)-f(x)>0$，从而 $F'(x)>0$，故 $F(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单调增加，

因此 $F(\beta)=\beta\int_0^{\alpha}f(u)du-\alpha\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du>F(\alpha)=\alpha\int_0^{\alpha}f(u)du>0$。