2012年研究生入学考试数学三试题及解析

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3　　[　　]

【分析】本题求曲线的渐近线，利用常规方法即可:

（1）水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则直线 $y=b$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

（2）垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

（3）斜渐近线

若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$，则 $y=ax+b$ 成为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

【详解】 $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\overset{\text{抓大头}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$，

所以 $y=1$ 是曲线的水平渐近线，则曲线无斜渐近线.

因为 $x=\pm1$ 时，$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 无意义,

又 $\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\infty$，

$\lim\limits_{x\to-1} y=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $x=1$ 是曲线的垂直渐近线。

综上，曲线有两条渐近线，故应选（C）。

【评注】当 $x\to\infty\left(\text{或}x\to+\infty\text{或}x\to-\infty\right)$ 时，曲线有水平渐近线，则无斜渐近线。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第6讲【例13】【例14】.

（2）设函数 $y(x)=\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)$，其中 n 为正整数，则 $y'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　（B）$(-1)^{n}(n-1)!$　（C）$(-1)^{n-1}n!$　（D）$(-1)^{n}n!$　[　　]

【分析】本题求函数在一点的导数值，可直接用定义进行运算。

【详解】$y(0)=0$，则

$$y'(0)=\lim_{x\to0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\lim_{x\to0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!。$$

故选（A）。

【评注】本题求n个因子的乘积在一点的导数值，也可利用$(uv)'=u'v+uv'$计算。因为乘积项中只有$(e^x-1)|_{x=0}=0$，所以求导时，将它作为一项，其他乘积作为一项进行运算。

$$y'(x)=(e^x-1)\left[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)\right]'+(e^x-1)'\left[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)\right],$$

所以

$$y'(0)=(e^0-1)\left[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)\right]'|_{x=0}+(e^x-1)'|_{x=0}\left[(e^0-2)\cdots(e^0-n)\right]$$

$$=0+(-1)^{n-1}(n-1)!=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

故选（A）。

完全类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 2 讲【例 5】.

（3）设函数$f(t)$连续，则二次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr=$

（A）$\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$ （B）$\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)dy$

（C）$\int_0^2dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dx$ （D）$\int_0^2dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)dx$ [ ]

【分析】本题考查将极坐标系下的二次积分化为直角坐标系下的二次积分，利用

$$I=\int_?^?d\theta\int_?^?f(M)rdr$$

$$=\int_?^?dx\int_?^?f(r\cos\theta,r\sin\theta)dy=\int_?^?dy\int_?^?f(r\cos\theta,r\sin\theta)dx$$

求解。

【详解】$\begin{cases}r=2\Rightarrow x^2+y^2=4\\ r=2\cos\theta\Rightarrow x^2+y^2=2x\end{cases},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow0\le x\le2,\sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2},$

所以原二次积分$=\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)dy$，即选（B）。

【评注】本题为基础题型。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第10讲【例4】.

（4）已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$条件收敛，则

（A）$0<\alpha\le\frac{1}{2}$ （B）$\frac{1}{2}<\alpha\le 1$ （C）$1<\alpha\le\frac{3}{2}$ （D）$\frac{3}{2}<\alpha<2$ [ ]

【分析】本题中已知两个交错级数的收敛性，判断级数中参数的范围。由于$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$绝对收敛，需利用正项级数的判敛准则；$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$条件收敛，需利用莱布尼茨判敛准则。

【详解】$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$绝对收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$收敛，

而当$n\to\infty$时，$\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\sim\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$，

所以 $\alpha-\frac{1}{2}>1\Rightarrow\alpha>\frac{3}{2}$；

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$条件收敛$\Rightarrow 0<2-\alpha\le 1\Rightarrow 1\le\alpha<2$，

综上，$\frac{3}{2}<\alpha<2$，故选（D）

【评注】对正项级数级数判敛时，p级数常作为比较级数。

（5）设$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\c_1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\c_2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\c_3\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\c_4\end{bmatrix}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量组线性相关的为

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ （B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ （C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ （D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ [ ]

【分析】本题判断三个三维向量是否线性相关，可利用定义或向量组的行列式是否为零来判断。

【详解】$(c_3+c_4)\alpha_1-c_1\alpha_3-c_1\alpha_4=0$，所以$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，故选（C）。

【评注】本题也可用行列式求解。因为各选项中皆有三个向量，而向量均是三维，所以若向量组的行列式为零，则该向量组线性相关。

（A） 选项，$\left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}=-c_1$，

（B） 选项，$\left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\right|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&1\\c_1&c_2&c_4\end{vmatrix}=c_1$，

（C） 选项，$\left|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，

（D）选项，$\left|\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\c_2&c_3&c_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\c_2&c_3&c_3+c_4\end{vmatrix}=-\left(c_3+c_4\right)$，

综上，因为c_1,c_2,c_3,c_4为任意常数，只有（C）选项中的向量组的行列式确定为零，即$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，故选（C）。

类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第3讲【例1】 【例7】.

（6）设A为3阶矩阵，P为3阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，若$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，$Q=\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right)$，则$Q^{-1}AQ=$

（A）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ （B）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ （C）$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ （D）$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ [ ]

【分析】本题实质考查矩阵的相似对角化。对可对角化矩阵A来讲，只要找到属于特征值λ_i线性无关的特征向量$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i}$，令$P=\left[\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1r_1},\cdots,\xi_{k1},\xi_{k2},\cdots,\xi_{kr_k}\right]$，则有

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&&\\&\lambda_1&&&\\&&\ddots&&\\&&&\lambda_k&\\&&&&\lambda_k\end{bmatrix}。$$

【详解】由题设可知，矩阵A的特征值为1，1，2，且

α_1,α_2是属于1的特征向量，且α_1,α_2线性无关，于是属于1的特征向量为

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$（k_1,k_2不全为零）；

α_3是属于特征值2的特征向量。

题中$Q=\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right)$，

而$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$是属于 1 的特征向量，$\alpha_3$是属于特征值 2 的特征向量，且

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}。$$

故选（B）。

【评注】本题出题形式较新颖，全面考查了可对角化矩阵与其特征值所组成的对角矩阵的关系。本题还可利用矩阵的乘法求解。

$$Q=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=PB,$$

所以$Q^{-1}AQ=\left(PB\right)^{-1}APB=B^{-1}P^{-1}APB=B^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}B$，

而$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

所以$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$。

故选（B）。

显然第一种解法要简洁许多。

类似例题见《文登暑期讲义》（理工类）第一篇【例 1.54】　【例 1.55】.

（7）设随机变量X与Y相互独立，且都服从区间$\left(0,1\right)$上的均匀分布，则$P\left\{X^2+Y^2\le 1\right\}=$

（A）$\dfrac{1}{4}$ （B）$\dfrac{1}{2}$ （C）$\dfrac{\pi}{8}$ （D）$\dfrac{\pi}{4}$ [ ]

【分析】本题求随机事件的概率。由于给出了边缘分布，结合随机变量 X 与 Y 相互独立的条件可直接得到 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$，然后计算二重积分 $P\left\{X^2+Y^2\le 1\right\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 即可。但本题联合分布为均匀分布，属几何概型，利用图示法，即利用面积计算会更简便。

【详解】随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，所以

X 与 Y 的联合分布为区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$ 上的均匀分布，

于是 $P\left\{X^2+Y^2\le 1\right\}=\dfrac{S_{\left\{(x,y)|X^2+Y^2\le 1\right\}\cap D}}{S_D}=\dfrac{\frac{\pi}{4}}{1}=\dfrac{\pi}{4}$。

【评注】本题为基本题型。对于题设条件有明显的几何意义，常用图示法求解。

类似例题见《文登暑期讲义》（概率论与数理统计）第 3 讲【例 5】【例 6】.

（8）设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N\left(1,\sigma^2\right)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{\left|X_3+X_4-2\right|}$ 的分布为

（A）$N(0,1)$ （B）$t(1)$ （C）$\chi^2(1)$ （D）$F(1,1)$ [ ]

【分析】本题判断所给统计量的分布。由于分子 X_1-X_2 服从正态分布 $N\left(0,2\sigma^2\right)$，分母并不是常数，可猜测它应服从 t 分布。

【详解】$\dfrac{X_1-X_2}{\left|X_3+X_4-2\right|}=\dfrac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}$，

因为 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1), \dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1), \left(\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$，

所以 $\dfrac{X_1-X_2}{\left|X_3+X_4-2\right|}=\dfrac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}\sim t(1)$。

【评注】要熟练掌握常见三种分布 χ^2,t,F 的具体构成形式。

类似例题见《文登暑期讲义》（概率论与数理统计）第 6 讲【例 1】【例 2】.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（9）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ________.

【分析】本题中的极限属“1^∞”型，利用“1^∞”的快速解法可得。

【详解】由快速解法可得

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{\cos x-\sin x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}=-\sqrt{2},$$

故所求极限为 $I=\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$。

【评注】“1^∞”的快速解法如下：

设 $\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$，则

$$\lim\left[1+f(x)\right]^{g(x)}\left(1^\infty\right)\overset{N=\mathrm{e}^{\ln N}}{=}\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln\left[1+f(x)\right]}=\mathrm{e}^{\lim f(x)g(x)},\ln\left[1+f(x)\right]\sim f(x)$$

记住结论：$1^\infty=\mathrm{e}^A$，A 为括号中 1 后的函数 $f(x)$ 与指数幂 $g(x)$ 乘积的极限。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 1 讲【例 16】及【Ex】.

（10）设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geq 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}, y=f\left(f(x)\right)$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=$ ________.

【分析】因为 $y'=f'\left(f(x)\right)f'(x)$，所以本题求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}$ 时，只需求得 $f'\left(f(\mathrm{e})\right)$ 和 $f'(\mathrm{e})$ 即可，而不必先求得 $y=f\left(f(x)\right)$ 的表达式。

【详解】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=f'\left(f(x)\right)f'(x)\Big|_{x=\mathrm{e}}=f'\left(f(\mathrm{e})\right)f'(\mathrm{e})=f'\left(\frac{1}{2}\right)f'(\mathrm{e})$，

而 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2, f'(\mathrm{e})=\frac{1}{2\mathrm{e}}$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$。

【评注】本题也可先求得 $y=f\left(f(x)\right)$ 的表达式，然后再求解，如下：

$$y=f\left(f(x)\right)=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)}, & f(x)\geq 1\\ 2f(x)-1, & f(x)<1\end{cases},$$

当$x\ge 1$时，要使$f\left(x\right)\ge 1$，则$x\ge \mathrm{e}^2$，此时$y=\ln\sqrt{\ln\sqrt{x}}$，

要使$f\left(x\right)<1$，则$x<\mathrm{e}^2$，此时$y=2\ln\sqrt{x}-1$；

当$x<1$时，要使$f\left(x\right)\ge 1$，则$x>1$，此时x的取值为空集，

要使$f\left(x\right)<1$，则$x<1$，此时$y=2\left(2x-1\right)-1=4x-3$；

综上，$y=f\left(f\left(x\right)\right)=\begin{cases}\ln\sqrt{\ln\sqrt{x}}, & x\ge \mathrm{e}^2\\ 2\ln\sqrt{x}-1, & 1\le x<\mathrm{e}^2\\ 4x-3 & x<1\end{cases}$，

所以$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。

显然【详解】中的解法简洁许多。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第2讲【例10】.

（11）设连续函数$z=f\left(x,y\right)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f\left(x,y\right)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}}=0$，则$\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=$________.

【分析】本题求二元函数在某点的全微分，利用$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$求解即可。

【详解】由$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f\left(x,y\right)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}}=0\Rightarrow f\left(0,1\right)=1$，

所以由$0=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f\left(x,y\right)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\left[f\left(x,y\right)-1\right]-2x+\left(y-1\right)}{\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}}$可知

$z=f\left(x,y\right)$在$\left(0,1\right)$处可微，且$f_x'\left(0,1\right)=-2, f_y'\left(0,1\right)=1$，

故$\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=f_x'\left(0,1\right)\mathrm{d}x+f_y'\left(0,1\right)\mathrm{d}y=-2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$。

【评注】本题利用了可微的充分条件，即若$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$，则

$z=f\left(x,y\right)$可微。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第9讲【例4】.

（12）由曲线$y=\dfrac{4}{x}$和直线$y=x$及$y=4x$所围平面图形的面积为________

【分析】本题求平面图形的面积，利用直角坐标系下平面图形的面积公式计算。

【详解】$S=\int_0^1(4x-x)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(\frac{4}{x}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+4\ln2-\frac{3}{2}=4\ln2$。

【评注】本题为基础题型，为定积分的应用题。

（13）设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第 1 行和第 2 行得矩阵 B，则 $|BA^*|=$________ .

【分析】本题中求两个方阵乘积的行列式。由于 B 为交换 A 的第 1 行和第 2 行所得，则 $|B|=-|A|$，此外，利用 $AA^*=|A|E$ 及性质 $|AB|=|A||B|$ 进行求解。

【详解】$|BA^*|=|B||A^*|=-|A||A^*|=-|AA^*|=-\left||A|E\right|=-3^3|E|=-27$。

【评注】题设中若出现 A 的伴随矩阵 A^*，要立刻想到 $AA^*=|A|E$。

类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第 1 讲【例 6】.

（14）设 A,B,C 为随机事件，A 与 C 互不相容，则 $P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\bar{C})=$__________ .

【分析】本题求条件概率，题设中还涉及不相容的概念，利用概率的性质和相关结论求解。

【详解】由于 A 与 C 互不相容，所以 $P(AC)=0$，而 $ABC\subset AC$，所以 $P(ABC)=0$，于是

$$P(AB|\bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

【评注】本题中直接利用了结论：

$$P(AB\bar{C})=P(AB)-P(ABC),P(\bar{C})=1-P(C)。$$

类似例题见《文登暑期讲义》（概率论与数理统计）第 1 讲【例 2】【例 3】.

三、**解答题**：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【分析】本题为“$\frac{0}{0}$”型未定式极限的计算。由于分子为两个函数之差 $e^{x^2}-e^{2-2\cos x}$，要想

到先作变换 $e^{x^2}-e^{2-2\cos x}=e^{x^2}\left(1-e^{2-2\cos x-x^2}\right)$，而当 $x\to 0$ 时，

$$e^{x^2}\to 1,\quad e^{2-2\cos x-x^2}-1\sim 2-2\cos x-x^2。$$

再利用洛必达法则并结合等价无穷小计算。

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\left(1-e^{2-2\cos x-x^2}\right)}{x^4}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2}{x^4}\overset{洛}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2x}{4x^3}$$

$$\overset{洛}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{2}}{12x^2}=\frac{1}{12}。$$

【评注】本题中

$$-\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2}{x^4}\overset{\cos x泰勒展开}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{2-x^2-2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right)}{x^4}=\frac{1}{12}。$$

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 1 讲【例 22】【例 24】.

（16）(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D e^x xy\,d\sigma$，其中区域 D 是以曲线 $y=\sqrt{x},y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域。

【分析】本题计算无边界区域上的二重积分，化为二次积分计算，注意积分次序。

【详解】由题意可知 $D=\left\{(x,y)\,|\,0<x\le 1,\sqrt{x}\le y\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\}$，于是

$$\iint_D e^x xy\,d\sigma=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 e^x x\,dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}y\,dy$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 e^x x\frac{1}{2}y^2\Big|_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}dx=\frac{1}{2}\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 e^x x\left(\frac{1}{x}-x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\left(e^x-e^x x^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x\left(1-x^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}e^x\left(1-x^2\right)\Big|_0^1+\int_0^1 xe^x dx$$

$$=-\frac{1}{2}+\left(xe^x\right)\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=\frac{1}{2}。$$

【评注】本题为基础题型。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 10 讲【例 6】.

（17） (本题满分 10 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品，投入的固定成本为 10000（万元），设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x（件）和 y（件），且这两种产品的边际成本分别为 $20+\frac{x}{2}$（万元/件）和 $6+y$（万元/件），

（Ⅰ）求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$（万元）；

（Ⅱ）当总产量为 50 件时，甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小？求最小成本；

（Ⅲ）求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义。

【分析】对（Ⅰ）问，题中给出两种产品的边际成本，实质为给出二元函数的偏导数，要求二元函数的表达式。（Ⅱ）为条件极值问题，可利用 $y=50-x$，化为无条件极值求解。

【详解】（Ⅰ）由已知得 $\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}=20+\frac{x}{2},\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}=6+y$，

于是 $C(x,y)=20x+\frac{x^2}{2}+6y+\frac{y^2}{2}+C$。

由于固定成本为 10000 元，即 $C(0,0)=10000$，

所以 $C=10000$，故 $C(x,y)=20x+\frac{x^2}{2}+6y+\frac{y^2}{2}+10000$。

（Ⅱ）当总产量为 50 件时，则 $x+y=50$，于是此时的成本函数

$$f(x,y)=C(x,50-x)=20x+\frac{x^2}{4}+6(50-x)+\frac{(50-x)^2}{2}+10000，$$

令 $f'(x)=\frac{3}{2}x-36=0\Rightarrow x=24$。又 $f''(24)=\frac{3}{2}>0$，

所以 $x=24$ 是成本函数 $C(x,50-x)$ 的最小值点，故甲、乙两种的产量分别为 24（件）和 26（件）时可使总成本最小，总成本为

$$C(24,26)=11118。$$

（III）$\left.\dfrac{\partial C}{\partial x}\right|_{(24,26)}=\left.(20+x)\right|_{(24,26)}=32$，其经济意义是，当生产乙产品 26 件时，生产第 25 件甲产品需增加 32 万元。

【评注】本题为多元函数微分学在经济中的应用题。

（18）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\dfrac{x^2}{2}\left(-1<x<1\right)$。

【分析】本题证明不等式，可移项作辅助函数，然后利用函数的单调增减性并结合最值求解。

【详解】将不等式等价变形为$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}\geq 0$，

作辅助函数

$$F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2},\quad F(0)=0$$

则

$$F'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,$$

令$F'(x)=0$，得驻点$x=0$，又$F''(0)=\left.\left[\dfrac{4}{\left(1-x^2\right)^2}-\cos x-1\right]\right|_{x=0}=2>0$，

所以$x=0$为$F(x)$在$(-1,1)$内的唯一极小值点，于是$x=0$为$F(x)$在$(-1,1)$内的最小值点，即$F(x)\geq F(0)=0$，故对任意$x\in(-1,1)$，有

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0,\ \text{即}\ x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}。$$

【评注】函数不等式的证明一般均需作辅助函数，并结合函数的单调增减性证明。其中“$x=0$为$F(x)$在$(-1,1)$内的最小值点”也可如下求解：

$$F''(x)=\frac{4}{\left(1-x^2\right)^2}-\cos x-1$$

当$-1<x<1$时，$F''(x)=\dfrac{4}{\left(1-x^2\right)^2}-\left(\cos x+1\right)\geq 4-2>0$。

所以$F'(x)$单调增加。

（1）当$0<x<1$时，有$F'(x)>F'(0)=0$，

（2）当$-1<x\le 0$时，有$F'(x)<F'(0)=0$，

于是$F(0)=0$是函数$F(x)$在$(-1,1)$内的最小值。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第7讲【例13】.

（19） (本题满分11分)

已知函数$f(x)$满足方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及$f''(x)+f(x)=2e^x$，

（Ⅰ）求$f(x)$的表达式;

（Ⅱ）求曲线$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$的拐点。

【分析】（Ⅰ）由于所求的函数$f(x)$需同时满足两个微分方程，可先求出第一个微分方程的通解，然后代入第二个方程求出参数。（Ⅱ）利用拐点的充分条件判断。

【详解】（Ⅰ） $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow \lambda_1=-2,\lambda_2=1,$$

所以$f(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x$， $f'(x)=-2C_1e^{-2x}+C_2e^x, f''(x)=4C_1e^{-2x}+C_2e^x$，

将以上两式代入$f''(x)+f(x)=2e^x$可得

$$f''(x)+f(x)=5C_1e^{-2x}+2C_2e^x=2e^x\Rightarrow C_1=0,C_2=1,$$

故$f(x)=e^x$。

（Ⅱ） $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，于是

$$y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1,\quad y''=2x+2(1+2x^2)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt\text{。}$$

所以当$x<0$时，$y''<0$；当$x>0$时，$y''>0$， 又$y(0)=0$

所以$(0,0)$曲线的拐点是$(0,0)$。

【评注】本题中第一个方程为齐次方程，通解求解相对容易一些。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第8讲【例10】 【例11】.

（20） (本题满分11分)

设 $A=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$，

（Ⅰ）计算行列式 $|A|$；

（Ⅱ）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解。

【分析】（Ⅰ）由于每行中零元素均有两个，可按行（或列）展开求解。

（Ⅱ）方程组 $Ax=\beta$ 若有无穷多解，则 $r(A)=r(A\mid\beta)<4$，可利用初等行变换求 a。

【详解】（Ⅰ）$|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$。

（Ⅱ）令 $|A|=1-a^4=0\Rightarrow a=\pm1$。

当 $a=1$ 时，

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right],$$

则 $r(A)=3, r(\overline{A})=4$，方程无解。

当 $a=-1$ 时，

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

则 $r(A)=3=r(\overline{A})<4$，方程组有无穷多组解。

由上可得，方程组与下面的方程组同解。

$\begin{cases}x_1-x_4=0\\x_2-x_4=-1\\x_3-x_4=0\end{cases}$，令 $x_4=k$，则方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -1+k \\ k \\ k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$，其中 k 为任意常数。

【评注】非齐次线性方程组的解的判定和求解是线性代数的核心内容，需熟练掌握。

类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第 4 讲【例 7】.

（21） (本题满分 11 分)

已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$，二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)x$ 的秩为 2，

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）求正交变换 $x=Qy$，将 f 化为标准形。

【分析】（Ⅰ）由 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)x$ 的秩为 2 可得 $r\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=2$，即有 $\left|A^{\mathrm{T}}A\right|=0$，从而可求出 a；

（Ⅱ）求出 $A^{\mathrm{T}}A$ 的三个正交的单位特征向量，令其组成的矩阵为 Q。

【详解】题设中已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)x$ 的秩为 2，则 $r\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=2$。

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{bmatrix},$$

所以 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{vmatrix}=0$，即

$$2\left[\left(1+a^2\right)\left(3+a^2\right)-\left(1-a\right)^2\right]-\left(1-a\right)^2\left(1+a^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(3+a^2\right)\left(a+1\right)^2=0\Rightarrow a=-1。$$

（Ⅱ）当 $a=-1$ 时，

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$$，其特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\2-\lambda&\lambda-2&0\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\-1&1&0\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&1&0\\-4&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

令上式$=0$，得$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$。

易解得$\left(0E-AA^{\mathrm{T}}\right)x=0$的基础解系为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$，

易解得$\left(2E-AA^{\mathrm{T}}\right)x=0$的基础解系为 $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，

易解得$\left(6E-AA^{\mathrm{T}}\right)x=0$的基础解系为$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$，

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$属于不同特征值的特征向量，已正交，我们只需将其标准化即可，

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}，\beta_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}，\beta_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}。$$

令$Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $f=2y_2^2+6y_3^2$。

【评注】本题关键是求出二次型对应矩阵的特征值及对应的特征向量。熟记某些常见结论对解题非常有帮助，如本题（Ⅰ）中，

由于$r(A)=r\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=2$，而

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以当$a=-1$时，$r(A)=2$。

完全类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第 6 讲【例 4】.

（22） **(**本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	**0**	**1**	**2**
0	$\frac{1}{4}$	**0**	$\frac{1}{4}$
1	**0**	$\frac{1}{3}$	**0**
2	$\frac{1}{12}$	**0**	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求$P\{X=2Y\}$；

（Ⅱ）求$\mathrm{cov}(X-Y,Y)$。

【分析】（Ⅰ）对离散型,求随机事件的概率时,只要将满足随机事件的概率相加即可,所以$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}$；

（Ⅱ）$\mathrm{cov}(X-Y,Y)=\mathrm{cov}(X,Y)-\mathrm{cov}(Y,Y)=EXY-EXEY-DY$，需先求出边缘分布律，继而利用定义和公式求得$EXY,EX,EY,DY$，代入上式即得。

【详解】（Ⅰ）$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$；

（Ⅱ）$\mathrm{cov}(X-Y,Y)=\mathrm{cov}(X,Y)-\mathrm{cov}(Y,Y)$。

由(X,Y)的概率分布可得(X,Y)的边缘分布为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

于是 $EX=\frac{2}{3},EY=1,EX^2=1,EY^2=\frac{5}{3}$， $EXY=\frac{2}{3}$,

所以 $\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0,\operatorname{cov}(Y,Y)=DY=EY^2-(EY)^2=\frac{2}{3}$,

$$\operatorname{cov}(X-Y,Y)=0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}。$$

【评注】本题为基础题型.

类似例题见《文登暑期讲义》（理工类）第一篇【例 1.54】 【例 1.55】.

（23） **(**本题满分 11 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布，记

$$U=\max\{X,Y\},V=\min\{X,Y\},$$

（Ⅰ）求 V 的概率密度 $f_V(v)$；

（Ⅱ）求 $E(U+V)$。

【分析】（Ⅰ）利用定义先求 $F_V(v)=P\{\min\{X,Y\}\le v\}$，然后求导即得 $f_V(v)$；

（Ⅱ）由于 $U+V=\min\{X,Y\}+\max\{X,Y\}=X+Y$，而 $EX=EY=1$，所以

$$E(U+V)=E(X+Y)=EX+EY=2。$$

【详解】（Ⅰ） X 和 Y 的分布函数均为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}。$$

$V=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_V(v)=P\{\min\{X,Y\}\le v\}=1-P\{\min\{X,Y\}>v\}$$

$$=1-P\{X>v\}P\{Y>v\}=1-(1-F(v))^2$$

$$=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2v}, & v\ge 0\\ 0 & v<0\end{cases}。$$

故V的概率密度 $f_V\left(v\right)=F_V'\left(v\right)\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2v}, & v>0\\ 0 & v\le 0\end{cases}$。

（Ⅱ）$U+V=\min\left\{X,Y\right\}+\max\left\{X,Y\right\}=X+Y$，

所以$E\left(U+V\right)=E\left(X+Y\right)=EX+EY=2$。

【评注】遇到两个随机变量函数的数字特征的计算问题时，一般利用性质或结论可快速解答。

类似例题见《文登暑期讲义》（概率论与数理统计）第 3 将【例 11】，第 4 讲【例 5】.