第六届校高数竞赛 试题讲评

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}dx$

解一 $\because 0\le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}\le x^n,$

$\therefore 0\le \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}dx\le \int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1},$

由夹逼性定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}dx=0.$

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}dx$

错解一 由积分中值定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\xi^n}{\sqrt{1+\xi^4}}=0.$$

$(0<\xi<1)$

错解二 由积分中值定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_n^n}{\sqrt{1+\xi_n^4}}=0.$$

$(0<\xi_n<1)$

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}dx$

解二 由积分第一中值定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^4}}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\xi_n^4}}\int_0^1 x^n dx\quad(0\le\xi_n\le 1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\xi_n^4}}\cdot\frac{1}{n+1}=0.$$

设函数 $f(x)$, $g(x)$在$[a,b]$上连续，

且$g(x)$不变号，则在$[a,b]$上至少存在一点ξ，

使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$

2. 设 $f(x)$在点$x=0$处二阶可导，且$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+2-x}{1-\cos 2x}=3,$

求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$.

解一 由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),$$

所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+2-x}{1-\cos 2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[f(0)+2]+[f'(0)-1]x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{2x^2}=3,$$

$\therefore f(0)=-2$，$f'(0)=1$，$f''(0)=12.$

2. 设 $f(x)$ 在点$x=0$处二阶可导，且$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+2-x}{1-\cos 2x}=3,$

求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$.

解二 由洛必达法则解，

$\because \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+2-x}{1-\cos 2x}=3$，$\therefore \lim\limits_{x\to0}[f(x)+2-x]=f(0)+2=0,$

故 $f(0)=-2,$

从而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+2-x}{1-\cos 2x}=\underline{\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-1}{4x}}=3$，故 $f'(0)=1,$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+2-x}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-1}{4x}=\underline{\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{4}=3},$$

故 $f''(0)=12.$

3. 计算不定积分 $\int \frac{dx}{x+x^{n+1}}$

解 $\int \frac{dx}{x+x^{n+1}} = \int \frac{dx}{x(1+x^n)} = \int \frac{x^{n-1}}{x^n(1+x^n)}dx$

$= \frac{1}{n}\int \frac{dx^n}{x^n(1+x^n)} = \frac{1}{n}\int (\frac{1}{x^n} - \frac{1}{1+x^n})dx^n$

$= \frac{1}{n}\ln|\frac{x^n}{1+x^n}| + C = \ln|x| - \frac{1}{n}\ln|1+x^n| + C$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调增加，

证明：$\int_a^b uf(u)du > \frac{a+b}{2}\int_a^b f(u)du$.

证 令 $F(x) = \int_a^x uf(u)du - \frac{a+x}{2}\int_a^x f(u)du, (a \le x \le b)$

则 $F'(x) = xf(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f(u)du - \frac{a+x}{2}f(x)$

$= \frac{x-a}{2}f(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f(u)du = \frac{x-a}{2}[f(x) - f(\xi)]\ (a<\xi<x)$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加， 所以 $F'(x)>0$，

故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，从而 $F(b)>F(a)=0$，

即 $\int_a^b uf(u)du > \frac{a+b}{2}\int_a^b f(u)du$.

5. 求曲线 $y = 3 - \left|x^2-1\right|$ 与 x 轴所围封闭图形绕 $y=3$ 旋转所得旋转体的体积.

解 $\because y = \begin{cases} 2+x^2, & 0\le|x|\le 1 \\ 4-x^2, & |x|>1 \end{cases}$ 曲线交 x 轴于点 $(-2,0),(2,0)$， 且图形对称于 y 轴，

曲线 $y=2+x^2(0\le x\le 1)$ 上点 (x,y) 到直线 $y=3$ 的距离为 $1-x^2$，

曲线 $y=4-x^2\ (x>1)$ 上点 (x,y) 到直线 $y=3$ 的距离为 x^2-1，

从而 $V = 2[\pi\cdot 3^2\cdot 2 - \pi\int_0^1 (1-x^2)^2dx - \pi\int_1^2 (x^2-1)^2dx]$

$= 2[18\pi - \pi\int_0^2 (x^2-1)^2dx]$

$= 36\pi - 2\pi\int_0^2 (x^4-2x^2+1)dx = \frac{448}{15}\pi$

6. 计算 $\iint\limits_D y(1+xe^{\frac{x^2+y^2}{2}})dxdy$，其中 D 由 $y=x$，$y=-1$ 及 $x=1$ 所围成.

解 $\iint\limits_D y(1+xe^{\frac{x^2+y^2}{2}})dxdy = \iint\limits_D y\,dxdy + \iint\limits_D xye^{\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$

其中 $\iint\limits_D ydxdy = \int_{-1}^1 ydy\int_y^1 dx = \int_{-1}^1 y(1-y)dy = -2\int_0^1 y^2dy = -\frac{2}{3}$

$\iint\limits_D xye^{\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy = \int_{-1}^1 ydy\int_y^1 xe^{\frac{x^2+y^2}{2}}dx = \int_{-1}^1 ydy\int_y^1 e^{\frac{x^2+y^2}{2}}d\frac{x^2+y^2}{2}$

$= \int_{-1}^1 y(e^{\frac{1+y^2}{2}} - e^{y^2})dy = 0$

(或者利用对称性，得 $\iint\limits_D xye^{\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy = 0$)

$\therefore \iint\limits_D y(1+xe^{\frac{x^2+y^2}{2}})dxdy = -\frac{2}{3}$.

7. 计算 $\oint_C \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$. 其中 C 为单位圆周 $x^2+y^2=1$ 沿逆时针方向.

解一 利用格林公式解 $\because P = \frac{x-y}{x^2+4y^2}$，$Q = \frac{x+4y}{x^2+4y^2}$，

$\therefore \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2+4y^2-8xy}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}\ (x^2+4y^2 \ne 0)$.

取适当小的正数 a，在 C 内作正向椭圆 L：$x^2+4y^2=a^2$，由格林公式

$\oint_C \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2} = \oint_L \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$

$= \frac{1}{a^2}\oint_L (x-y)dx+(x+4y)dy = \frac{2}{a^2}\iint\limits_D dxdy = \frac{2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\pi = \pi$

其中 D：$x^2+4y^2 \le a^2$.

7. 计算 $\oint_C \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$. 其中 C 为单位圆周沿逆时针方向.

解二 直接计算 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}, (0\le\theta\le 2\pi)$，

故 原式 $= \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\theta-\sin\theta)(-\sin\theta)+(\cos\theta+4\sin\theta)(\cos\theta)}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1+3\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+3\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}d\theta$

$= 2\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{1+4\tan^2\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d2\tan\theta}{1+4\tan^2\theta}$

$= 2\arctan(2\tan\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$

8. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ 的敛散性，并说明理由.

解 $\because u_n=\frac{(-1)^n[\sqrt{n}+(-1)^n]}{[\sqrt{n}-(-1)^n][\sqrt{n}+(-1)^n]}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}+\frac{1}{n-1}$,

令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$， 则 $f'(x)=-\frac{1+x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0\ (x>1)$

故数列 $\{\frac{\sqrt{n}}{n-1}\}(n\geq 2)$ 单调减少，又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0$,

从而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛，又级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，

从而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}[(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}+\frac{1}{n-1}]$ 发散，

故原级数发散.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶连续导数，证明 存在 $\xi\in(a,b)$,

使得 $f(b)=f(a)+(b-a)f'(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$.

证 将 $f(x)$ 在点 $x_0=\frac{a+b}{2}$ 处展开为二阶台劳公式，

并分别将 $x=a$，$x=b$ 代入，有

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})-f'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+f''(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8}-\frac{f'''(\xi_1)}{48}(b-a)^3,$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+f''(\frac{a+b}{2})\frac{(b-a)^2}{8}+\frac{f'''(\xi_2)}{48}(b-a)^3$$

其中 $a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$， 两式相减，得

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^3}{48}[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)],$$

又 $f'''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由介值定理，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\in(a,b)$

使得 $[f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)]=2f'''(\xi)$,

即有 $f(b)=f(a)+(b-a)f'(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$.