2012 年研究生入学考试数学二试题及解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3　　[　　]

【分析】本题求曲线的渐近线，利用常规方法即可:

（1）水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则直线 $y=b$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

（2）垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

（3）斜渐近线

若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$，则 $y=ax+b$ 成为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

【详解】 $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\overset{\text{抓大头}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$，

所以 $y=1$ 是曲线的水平渐近线，则曲线无斜渐近线.

因为 $x=\pm1$ 时，$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 无意义,

又 $\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\infty$，

$$\lim_{x\to-1} y=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2},$$

所以 $x=1$ 是曲线的垂直渐近线。

综上，曲线有两条渐近线，故应选（C）。

【评注】当 $x\to\infty\left(\text{或}x\to+\infty\text{或}x\to-\infty\right)$ 时，曲线有水平渐近线，则无斜渐近线。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 6 讲【例 13】【例 14】.

（2）设函数 $y(x)=\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)$，其中 n 为正整数，这 $y'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　（B）$(-1)^n(n-1)!$　（C）$(-1)^{n-1}n!$　（D）$(-1)^n n!$　[　　]

【分析】本题求函数在一点的导数值，可直接用定义进行运算。

【详解】$y(0)=0$，则

$$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)=(-1)^{n-1}(n-1)!。$$

故选（A）。

【评注】本题求 n 个因子的乘积在一点的导数值，也可利用 $(uv)'=u'v+uv'$ 计算。因为乘积项中只有 $\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\big|_{x=0}=0$，所以求导时，将它作为一项，其他乘积作为一项进行运算。

$$y'(x)=\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left[\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)\right]'+\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)'\left[\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)\right],$$

所以

$$y'(0)=\left(\mathrm{e}^{0}-1\right)\left[\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)\right]'\big|_{x=0}+\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)'\big|_{x=0}\left[\left(\mathrm{e}^{0}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{0}-n\right)\right]$$

$$=0+(-1)^{n-1}(n-1)!=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

故选（A）。

完全类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 2 讲【例 5】.

（3）设 $a_n>0\,(n=1,2,3,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

（A）充分必要条件 （B）充分非必要条件

（C）必要非充分条件 （D）既非充分也非必要条件 [ ]

【分析】本题考查正项级数的前 n 项和的有界与通项 $\{a_n\}$ 收敛的因果关系。分别验证“充分性”和“必要性”。

【详解】因为 $a_n>0\,(n=1,2,3,\cdots)$,则数列 $\{S_n\}$ 单调增加,若 $\{S_n\}$ 有界,则 $\{S_n\}$ 收敛，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=0$，所以数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分条件.

若数列 $\{a_n\}$ 收敛，不妨取 $a_n=\dfrac{1}{n}$,则 $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 无界,所以选(B).

【评注】本题中利用了数列收敛的准则之一：单调有界数列必有极限。

（4）设 $I_k=\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x\left(k=1,2,3\right)$，则有

（A）$I_1<I_2<I_3$ （B）$I_3<I_2<I_1$

（C）$I_2<I_3<I_1$ （D）$I_2<I_1<I_3$ [ ]

【分析】本题为定积分的比较。题中 I_1,I_2,I_3 的被积函数相同，积分区间不同，但 $\left[0,\pi\right]\subset\left[0,2\pi\right]\subset\left[0,3\pi\right]$，所以较易想到利用定积分对区间的可加性处理后，再利用定积分的比较定理。

【详解】当 $\pi<x<2\pi$时，$\mathrm{e}^{x^2}\sin x<0\Rightarrow\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x<0$，

所以 $I_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=I_1+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x<I_1$，

又 $I_3=\int_0^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=I_1+\int_{\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$，

而 $\int_{\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x>\int_{\pi}^{3\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$，

所以 $I_1<I_3$，故 $I_2<I_1<I_3$，即选（D）

【评注】定积分的比较定理在考研数学的选择题中多次出现，考生需熟练掌握。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 5 讲【例 2】.

（5）设函数 $f\left(x,y\right)$ 为可微函数，且对任意的 x,y 都有 $\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}<0$，则使不等式 $f\left(x_1,y_1\right)<f\left(x_2,y_2\right)$ 成立的一个充分条件是

（A）$x_1>x_2,y_1<y_2$ （B）$x_1>x_2,y_1>y_2$

（C）$x_1<x_2,y_1<y_2$ （D）$x_1<x_2,y_1>y_2$ [ ]

【分析】本题给出了二元函数偏导数的正负符号，进而根据函数的单调增减性考查不等式成立的充分条件，逐一验证即可。

【详解】因为对任意的 x,y 都有 $\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}<0$，则

当 y 固定时，$f\left(x,y\right)$ 关于 x 单调增加；当 x 固定时，$f\left(x,y\right)$ 关于 y 单调减少。

于是对 $x_1>x_2,y_1<y_2$，有 $f\left(x_1,y_1\right)>f\left(x_2,y_1\right)>f\left(x_2,y_2\right)$，

对 $x_1>x_2,y_1>y_2$，有 $f\left(x_1,y_1\right)>f\left(x_2,y_1\right)<f\left(x_2,y_2\right)$，

对 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$，有 $f(x_1,y_1) < f(x_2,y_1) > f(x_2,y_2)$，

对 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$，有 $f(x_1,y_1) < f(x_2,y_1) < f(x_2,y_2)$。

综上，（D）选项为不等式 $f(x_1,y_1) < f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件，故选（D）。

【评注】本题中给出的是给出了二元函数偏导数的正负符号，所以只能得到 $f(x,y)$ 关于 x 或 y 的单调性，则对 $f(x_1,y_1) < f(x_2,y_2)$ 判断时，需设一个中间量 $f(x_2,y_1)$ 。

（6） 设区域 D 由 $y=\sin x, x=\pm\dfrac{\pi}{2}, y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D (xy^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

（A）π （B）2 （C）-2 （D）$-\pi$ [ ]

【分析】本题求二重积分，可作辅助线简化运算。

【详解】在区域 D 中作一条辅助线 $y=-\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le 0\right)$，则区域 D 分为两部分 D_1，D_2，其中 D_1 关于 y 轴对称，D_2 关于 x 轴对称，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (xy^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_1}(xy^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(xy^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= -\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由图形的对称性，可得 $\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\cdot 1=\pi$，于是

$$\iint\limits_D (xy^5-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y == -\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi,$$

故选（D）。

【评注】计算二重积分时，一般要先利用对称区间函数的奇偶性简化积分，若积分区间不对称，则可考虑作辅助函数。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第10【例1】 【例2】.

（7）设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\c_1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\c_2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\c_3\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\c_4\end{bmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ （B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ （C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ （D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ [ ]

【分析】本题判断三个三维向量是否线性相关，可利用定义或向量组的行列式是否为零来判

断。

【详解】$(c_3+c_4)\alpha_1-c_1\alpha_3-c_1\alpha_4=0$，所以$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，故选（C）。

【评注】本题也可用行列式求解。因为各选项中皆有三个向量，而向量均是三维，所以若向量组的行列式为零，则该向量组线性相关。

（A） 选项，$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}=-c_1$，

（B） 选项，$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&1\\c_1&c_2&c_4\end{vmatrix}=c_1$，

（C） 选项，$|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，

（D）选项，$|\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\c_2&c_3&c_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\c_2&c_3&c_3+c_4\end{vmatrix}=-(c_3+c_4)$，

综上，因为c_1,c_2,c_3,c_4为任意常数，只有（C）选项中的向量组的行列式确定为零，即$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，故选（C）。

类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第3讲【例1】 【例7】.

（8） 设A为3阶矩阵，P为3阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，若$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则$Q^{-1}AQ=$

（A）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ （B）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ （C）$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ （D）$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ [ ]

【分析】本题实质考查矩阵的相似对角化。对可对角化矩阵A来讲，只要找到特征值λ_i线性无关的特征向量$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i}$，令$P=[\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1r_1},\cdots,\xi_{k1},\xi_{k2},\cdots,\xi_{kr_k}]$，则有

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_k & \\ & & & & \lambda_k\end{bmatrix}。$$

【详解】由题设可知，矩阵A的特征值为1，1，2，且

α_1,α_2是属于1的特征向量，且α_1,α_2线性无关，于是属于1的特征向量为

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$（k_1,k_2不全为零）；

α_3是属于特征值2的特征向量。

题中$Q=\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right)$，

而$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$是属于 1 的特征向量，$\alpha_3$是属于特征值 2 的特征向量，且

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}。$$

故选（B）。

【评注】本题出题形式较新颖，全面考查了可对角化矩阵与其特征值所组成的对角矩阵的关系。本题还可利用矩阵的乘法求解。

$$Q=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=PB,$$

所以$Q^{-1}AQ=\left(PB\right)^{-1}APB=B^{-1}P^{-1}APB=B^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}B$，

而$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

所以$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$。

故选（B）。

显然第一种解法要简洁许多。

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（9）设 $y=y\left(x\right)$ 是由方程 $x^2-y+1=\mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=$ ________.

【分析】本题求隐函数在某点的二阶导数，两边对 x 求导即得。

【详解】当 $x=0$ 时，$y=0$，即 $y\left(0\right)=0$

$x^2-y+1=\mathrm{e}^y$ 两边对 x 求导得

$$2x-y'=\mathrm{e}^y y'\Rightarrow 2x=\left(\mathrm{e}^y+1\right)y'\Rightarrow y'=\frac{2x}{\mathrm{e}^y+1}，\quad y'\left(0\right)=\frac{2x}{\mathrm{e}^y+1}\Big|_{x=0}=0，$$

$2x=\left(\mathrm{e}^y+1\right)y'$ 两边对 x 求导得

$$2=\left(\mathrm{e}^y+1\right)y''+\mathrm{e}^y y'^2，$$

将 $x=0$ 代入上式得 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=\dfrac{2}{1+1}=1$。

【评注】求二阶导数在某点的值，无需求出二阶导数的表达式。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 2 讲【例 12】.

（10）$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________.

【分析】本题求 n 项和的极限，将极限式变形后可看出可利用定积分的定义计算极限。

【详解】$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}。$$

【评注】利用定积分的定义即和式的极限是求 n 项和的数列极限的一种方法，需熟练掌握。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 1 讲【例 31】.

（11）设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$，其中函数 $f\left(u\right)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

【分析】本题求二元复合函数的偏导数，利用复合函数的“链式法则”计算即可。

【详解】令 $u=\ln x+\dfrac{1}{y}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\frac{1}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\left(-\frac{1}{y^2}\right),$$

所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf'(u)\dfrac{1}{x}+y^2f'(u)\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)=0$。

【评注】本题为基础题型。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 9 讲【例 11】　【例 12】.

（12）微分方程 $y\mathrm{d}x+\left(x-3y^2\right)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的解 $y=$________

【分析】$y\mathrm{d}x+\left(x-3y^2\right)\mathrm{d}y=0\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{y}{x-3y^2}\left(x-3y^2\neq0\right)$，不易求解。

而当 $y\neq0$ 时，$y\mathrm{d}x+\left(x-3y^2\right)\mathrm{d}y=0\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{x-3y^2}{y}=-\dfrac{x}{y}+3y$，

其为 x 关于 y 的一阶线性微分方程，利用常规方法求解即可。

【详解】当 $y\neq0$ 时，方程可变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{x-3y^2}{y}=-\frac{x}{y}+3y，$$ 此为 x 关于 y 的一阶线性微分方程，

方程的通解为

$$x=\left(\int 3y\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}=\frac{1}{y}\left(y^3+C\right),$$

将 $y\big|_{x=1}=1$ 代入上式得，$C=0$，于是满足初始条件的解为

$$x=\frac{1}{y}\left(y^3+0\right)=y^2$$ ，即 $y=\sqrt{x}$。

【评注】x 和 y 谁为因变量，谁为自变量无固定形式，而由解方程的难易程度确定。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 8 讲【例 3】.

（13）曲线 $y=x^2+x\left(x<0\right)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt2}{2}$ 的点的坐标是________ .

【分析】本题中曲线上满足曲率为 $\dfrac{\sqrt2}{2}$ 的点的坐标，利用曲率的计算公式即得。

【详解】由题设可得 $y'=2x+1, y''=2$，则点(x,y)的曲率为

$$k=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\left(1+(2x+1)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

令$k=\dfrac{2}{\left(1+(2x+1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x_1=0, x_2=-1$，

由于题中要求$x<0$，所以$x=-1$，此时，$y=0$，

所以满足条件的点的坐标为$(-1,0)$。

【评注】对曲线的曲率，曲率圆，曲率半径，只要掌握计算公式即可。

（14）设A为3阶矩阵，$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵，若交换A的第1行和第2行得矩阵B，则$|BA^*|=$________ .

【分析】本题中求两个方阵乘积的行列式。由于B为交换A的第 1 行和第 2 行所得，则$|B|=-|A|$，此外，利用$AA^*=|A|E$及性质 $|AB|=|A||B|$进行求解。

【详解】$|BA^*|=|B||A^*|=-|A||A^*|=-|AA^*|=-||A|E|=-3^3|E|=-27$。

【评注】题设中若出现A的伴随矩阵A^*，要立刻想到$AA^*=|A|E$。

类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第1讲【例6】.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15） **(**本题满分 10 分)

已知函数$f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，

（Ⅰ）求a的值；

（Ⅱ）若$x\to 0$时，$f(x)-a$与x^k是同阶无穷小，求常数k的值。

【分析】（Ⅰ）该极限为$\infty-\infty$，通分后化为$\dfrac{0}{0}$型求解。

（Ⅱ）若$f(x)-a$与x^k是同阶无穷小，则有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^k}=C(C\neq 0)$。

【详解】（Ⅰ）$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)-\sin x}{x\sin x}$

$$\overset{\sin x\sim x}{\underset{x\to 0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)-\sin x}{x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x+1-\cos x}{2x}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{2}=1\text{。}$$

（Ⅱ）若 $f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^k}=C(C\neq 0),$$

$$于是 C=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)-\sin x-x\sin x}{x^{k+1}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x+1-\cos x-\sin x-x\cos x}{(k+2)x^{k+1}}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x+\sin x+x\sin x}{(k+2)(k+1)x^k}=\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+\cos x+x\cos x}{(k+2)(k+1)kx^{k-1}}$$

此时分子极限为 1，所以 $k-1=0\Rightarrow k=1$，

则有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{6}$， $f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小。

【评注】第（Ⅰ）问的解答中

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1-\cos x}{2x}=1+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}\overset{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}{\underset{x\to 0}{=}}1+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=1+0=1\text{ 。}$$

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 1 讲【例 25】.

（16） (本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值。

【分析】本题求二元函数的极值，先利用必要条件求出可能的极值点，然后利用取极值的充分条件进行判断。

【详解】
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm 1\\y=0\end{cases},$$

于是可能的极值点为

$$(1,0,),(-1,0)$$

又

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-x\left(3-x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-y\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x\left(1-y^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

于是 $A\big|_{(1,0)}=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<0,B\big|_{(1,0)}=0,C\big|_{(1,0)}=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},B^2-AC=-2\mathrm{e}^{-1}<0$，

所以 $(1,0)$ 为极大值，且极大值为 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，

$$A\big|_{(-1,0)}=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}>0,B\big|_{(-1,0)}=0,C\big|_{(-1,0)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},B^2-AC=-2\mathrm{e}^{-1}<0，$$

所以 $(-1,0)$ 为极小值，且极小值为 $-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

【评注】二元函数的极值为基本题型，需熟练掌握。

具体解法见《文登暑期讲义》（高等数学）第 9 讲（无条件极值的求法）及【例 17】。

（17） (本题满分 10 分)

过 $(0,1)$ 作曲线 $L:y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

【分析】本题求平面图形的面积及平面图形绕坐标轴旋转所得的旋转体的体积，为定积分的应用题，所以需求得 A， B 点的坐标，即需求得定积分的上下限。

【详解】设 A 为 $\left(x_0,y_0\right)$，则过 $(0,1)$ 的曲线 $L:y=\ln x$ 的切线方程为

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$$

将 $(0,1)$ 代入上式得 $1-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(0-x_0\right)\Rightarrow x_0=\mathrm{e}^2,y_0=2$，即 A 为 $\left(\mathrm{e}^2,2\right)$。

在 $y=\ln x$ 中令 $y=0$，则 $x=1$，于是 B 点坐标为 $(1,0)$。

显然曲线 L 位于直线 AB 的上方，

所以 $S_D=\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2-1\right)\cdot 2$

$$=\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x-\left(\mathrm{e}^2-1\right)=x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-\int_1^{\mathrm{e}^2}\mathrm{d}x-\left(\mathrm{e}^2-1\right)=2。$$

所求体积为

$$V=\pi\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln^2 x\mathrm{d}x-\frac{4\pi}{3}\left(\mathrm{e}^2-1\right)$$

$$=\pi\left(x\ln^2 x-2x\ln x+2x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-\frac{4\pi}{3}\left(\mathrm{e}^2-1\right)=\frac{2\pi}{3}\left(\mathrm{e}^2-1\right)。$$

【评注】本题中计算平面图形的面积及旋转体的体积时，利用了直角三角形的面积公式和圆锥体的体积的计算公式。熟悉和掌握初等数学的公式及结论在某些时候能极大地简化计算。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 6 讲【例 21】.

（18）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ 与极轴围成。

【分析】本题计算二重积分，由于积分域由极坐标表示，所以积分化为极坐标下的二次积分计算。

【详解】$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)^4\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta\left(1+\cos\theta\right)^4\mathrm{d}\cos\theta\overset{u=\cos\theta}{=}-\frac{1}{4}\int_1^{-1}u\left(1+u\right)^4\mathrm{d}u$$

$$=2\int_0^1\left(u^2+u^4\right)\mathrm{d}u=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{15}。$$

【评注】本题为基础题型。计算二重积分时，时刻要想到利用奇偶函数在对称区间的性质简化运算。

（19） **(**本题满分 11 分)

已知函数 $f\left(x\right)$ 满足方程 $f''\left(x\right)+f'\left(x\right)-2f\left(x\right)=0$ 及 $f''\left(x\right)+f\left(x\right)=2\mathrm{e}^x$，

（Ⅰ）求 $f\left(x\right)$ 的表达式；

（Ⅱ）求曲线 $y=f\left(x^2\right)\int_0^x f\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$ 的拐点。

【分析】（Ⅰ）由于所求的函数 $f\left(x\right)$ 需同时满足两个微分方程，可先求出第一个微分方程的通解，然后代入第二个方程求出参数。（Ⅱ）利用拐点的充分条件判断。

【详解】（Ⅰ） $f''\left(x\right)+f'\left(x\right)-2f\left(x\right)=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow\lambda_1=-2,\lambda_2=1，$$

所以 $f\left(x\right)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x$， $f'\left(x\right)=-2C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x, f''\left(x\right)=4C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x$，

将以上两式代入 $f''\left(x\right)+f\left(x\right)=2\mathrm{e}^x$ 可得

$$f''\left(x\right)+f\left(x\right)=5C_1\mathrm{e}^{-2x}+2C_2\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x\Rightarrow C_1=0,C_2=1，$$

故 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x$。

（Ⅱ） $y=f\left(x^2\right)\int_0^x f\left(-t^2\right)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，于是

$$y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1,\quad y''=2x+2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt。$$

所以当 $x<0$ 时，$y''<0$；当 $x>0$ 时，$y''>0$， 又 $y(0)=0$

所以 $(0,0)$ 曲线的拐点是 $(0,0)$。

【评注】本题中第一个方程为齐次方程，通解求解相对容易一些。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 8 讲【例 10】 【例 11】.

（20） (本题满分 11 分)

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\dfrac{x^2}{2}\left(-1<x<1\right)$。

【分析】本题证明不等式，可移项作辅助函数，然后利用函数的单调增减性求解。

【详解】将不等式等价变形为 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}\geq 0$，

作辅助函数

$$F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2},\quad F(0)=0$$

则

令 $F'(x)=0$，得驻点 $x=0$，又

$$F''(0)=\left[\frac{4}{\left(1-x^2\right)^2}-\cos x-1\right]\Bigg|_{x=0}=2>0,$$

所以 $x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的唯一极小值点，于是 $x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小值点，即 $F(x)\geq F(0)=0$，故对任意 $x\in(-1,1)$，有

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0,\text{ 即 } x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}。$$

【评注】函数不等式的证明一般均需作辅助函数，并结合函数的单调增减性证明。其中“$x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小值点”也可如下求解：

$$F''(x)=\frac{4}{\left(1-x^2\right)^2}-\cos x-1$$

当 $-1<x<1$ 时，$F''(x)=\dfrac{4}{\left(1-x^2\right)^2}-\left(\cos x+1\right)\geq 4-2>0$。

所以 $F'(x)$ 单调增加。

（1）当 $0<x<1$ 时，有 $F'(x)>F'(0)=0$，

（2）当 $-1<x\le 0$ 时，有 $F'(x)<F'(0)=0$，

于是 $F(0)=0$ 是函数 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小值。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 7 讲【例 13】.

（21） **(**本题满分 11 分)

（Ⅰ）证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1(n\text{为大于1的整数})$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（Ⅱ）记 （Ⅰ）中的实根为 x_n ，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限。

【分析】（Ⅰ）证明“有且仅有一个”一般利用以下方法：（1）至少有一个，一般利用罗尔定理或零值定理证明；（2）至多有一个，一般利用函数的单调性证明。

（Ⅱ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在一般利用数列的单调有界性。

【详解】（Ⅰ）令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内可导，且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-1=-\frac{1}{2^n}<0,\ f(1)=n-1>0,$$

由闭区间上连续函数的零值定理可得，至少存在一点 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\xi)=0$，

即方程 $f(x)=0$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内至少有一个实根。

当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时， $f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>1>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内单调增加。

综上所述，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根，即方程

$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1\left(n\text{为大于1的整数}\right)$在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根。

（Ⅱ）由$x_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)$可知数列$\{x_n\}$有界，又

$$x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n=1,$$

$$x_{n+1}{}^{n+1}+x_{n+1}{}^{n}+x_{n+1}{}^{n-1}\cdots+x_{n+1}=1,$$

由于$x_{n+1}^{n+1}>0$，所以

$$x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n>x_{n+1}{}^{n}+x_{n+1}{}^{n-1}\cdots+x_{n+1},$$

于是有$x_n>x_{n+1}\left(n=1,2,\cdots\right)$，即$\{x_n\}$单调减少。

综上$\{x_n\}$单调有界，故$\{x_n\}$收敛。

记$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，由于

$$x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n=1\Rightarrow\frac{x_n\left(1-x_n^n\right)}{1-x_n}=1。$$

令$n\to\infty$，并注意$\frac{1}{2}<x_n<x_1<1$，则有$\frac{a}{1-a}=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$。

【评注】本题实质考查了两个问题，即方程根的唯一性与数列极限的存在性。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第6讲【例17】，第1讲【例30】.

（22）（本题满分11分）

设$A=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$，

（Ⅰ）计算行列式$|A|$；

（Ⅱ）当实数a为何值时，方程组$Ax=\beta$有无穷多解，并求其通解。

【分析】（Ⅰ）由于每行中零元素均有两个，可按行（或列）展开求解。

（Ⅱ）方程组$Ax=\beta$若有无穷多解，则$r\left(A\right)=r\left(A|\beta\right)<4$，可利用初等行变换求$a$。

【详解】（Ⅰ）$|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$。

（Ⅱ）令 $|A|=1-a^4=0\Rightarrow a=\pm1$。

当 $a=1$ 时，

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right],$$

则 $r(A)=3,r(\overline{A})=4$，方程无解。

当 $a=-1$ 时，

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

则 $r(A)=3=r(\overline{A})<4$，方程组有无穷多组解。

由上可得，方程组与下面的方程组同解。

$\begin{cases}x_1-x_4=0\\x_2-x_4=-1\\x_3-x_4=0\end{cases}$，令 $x_4=k$，则方程组的通解为

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\-1+k\\k\\k\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$，其中 k 为任意常数。

【评注】非齐次线性方程组的解的判定和求解是线性代数的核心内容，需熟练掌握。

类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第 4 讲【例 7】.

（23） (本题满分 11 分)

已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x$ 的秩为 2，

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）求正交变换 $x=Qy$，将 f 化为标准形。

【分析】（Ⅰ）由 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)x$ 的秩为 2 可得 $r\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=2$，即有 $\left|A^{\mathrm{T}}A\right|=0$，从而可求出 a；

（Ⅱ）求出 $A^{\mathrm{T}}A$ 的三个正交的单位特征向量，令其组成的矩阵为 Q。

【详解】题设中已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)x$ 的秩为 2，则 $r\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=2$。

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&a\\1&1&a&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{bmatrix},$$

所以 $\begin{vmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{vmatrix}=0$，即

$$2\left[\left(1+a^2\right)\left(3+a^2\right)-\left(1-a\right)^2\right]-\left(1-a\right)^2\left(1+a^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(3+a^2\right)\left(a+1\right)^2=0\Rightarrow a=-1。$$

（Ⅱ）当 $a=-1$ 时，

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix},$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\2-\lambda&\lambda-2&0\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=\left(\lambda-2\right)\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\-1&1&0\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\left(\lambda-2\right)\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&1&0\\-4&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-6\right),$$

令上式 $=0$，可得 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$。

易解得$\left(0E-AA^{\mathrm{T}}\right)x=0$的基础解系为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$，

易解得$\left(2E-AA^{\mathrm{T}}\right)x=0$的基础解系为 $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，

易解得$\left(6E-AA^{\mathrm{T}}\right)x=0$的基础解系为$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$，

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$属于不同特征值的特征向量，已正交，我们只需将其标准化即可，

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}，\beta_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}，\beta_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}。$$

令$Q=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)$，则 $f=2y_2^2+6y_3^2$。

【评注】本题关键是求出二次型对应矩阵的特征值及对应的特征向量。熟记某些常见结论对解题非常有帮助，如本题（Ⅰ）中，

由于$r\left(A\right)=r\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=2$，而

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以当$a=-1$时，$r\left(A\right)=2$。

完全类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第 6 讲【例 4】.