浙江科技学院第十二届高等数学竞赛
试题参考答案

2016 年 5 月 21 日

1．求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{5}{3}}(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}-2\sqrt[3]{x})$。 **（10 分）**

解： 令 $t=\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时 ，$t\to 0$

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{t}-1}+\sqrt[3]{\frac{1}{t}+1}-2\sqrt[3]{\frac{1}{t}}}{t^{\frac{5}{3}}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-t}+\sqrt[3]{1+t}-2}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}t^2+o(t^2)+1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}t^2+o(t^2)-2}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{2}{9}t^2+o(t^2)}{t^2}=-\frac{2}{9}\text{。}$$

2．计算 $\displaystyle\int\frac{x+4}{(1+x^2)^2}dx$。 **（10 分）**

解 1：$$\int\frac{x+4}{(1+x^2)^2}dx=-\int\frac{x+4}{2x}d\frac{1}{1+x^2}=-\frac{x+4}{2x}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+\frac{4}{x})$$

$$=-\frac{x+4}{2x(1+x^2)}-2\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx=-\frac{x+4}{2x(1+x^2)}-2\int(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$=-\frac{x+4}{2x(1+x^2)}+\frac{2}{x}+2\arctan x+C=\frac{4x-1}{2(1+x^2)}+2\arctan x+C\text{。}$$

解 2：$$\int\frac{x+4}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)+\int\frac{4}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{2(1+x^2)}+\int\frac{4}{(1+x^2)^2}dx$$ （第二项令 $x=\tan t$ ）

$$=-\frac{1}{2(1+x^2)}+\int\frac{4\sec^2 t}{\sec^4 t}dt=-\frac{1}{2(1+x^2)}+4\int\cos^2 t dt$$

$$=-\frac{1}{2(1+x^2)}+2\int(1+\cos 2t)dt=-\frac{1}{2(1+x^2)}+2t+\sin 2t+C$$

$$=-\frac{1}{2(1+x^2)}+2\arctan x+2\sin t\cos t+C$$

$$=-\frac{1}{2(1+x^2)}+2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}+C=\frac{4x-1}{2(1+x^2)}+2\arctan x+C$$

解 3： $\int \frac{x+4}{(1+x^2)^2}dx \overset{x=\tan t}{=} \int \frac{\tan t+4}{\sec^4 t}\cdot \sec^2 t dt = \int (\sin t\cos t + 4\cos^2 t)dt$

$$= \frac{1}{2}\sin^2 t + 2\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\sin^2 t + 2t + \sin 2t + C$$

$$= \frac{x^2}{2(1+x^2)} + 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2} + C$$

3． 计算二重积分 $I = \iint\limits_D \min\{x, \sqrt{2y-y^2}\}dxdy$， $D: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$ **（12 分）**

解：记 $D_1: 0 \le y \le 2, 0 \le x \le \sqrt{2y-y^2}$， $D_2: 0 \le y \le 2,\ \sqrt{2y-y^2} \le x \le 2$，则

$$I = \iint\limits_{D_1} xdxdy + \iint\limits_{D_2} \sqrt{2y-y^2}dxdy = \int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} xdx + \int_0^2 dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^2 \sqrt{2y-y^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (2y-y^2)dy + \int_0^2 \sqrt{2y-y^2}(2-\sqrt{2y-y^2})dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (2y-y^2)dy + 2\int_0^2 \sqrt{2y-y^2}dy - \int_0^2 (2y-y^2)dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 (2y-y^2)dy + 2\int_0^2 \sqrt{2y-y^2}dy = -\frac{2}{3} + 2\int_0^2 \sqrt{2y-y^2}dy$$

$$= -\frac{2}{3} + 2\int_0^2 \sqrt{1-(y-1)^2}dy \overset{t=y-1}{=} -\frac{2}{3} + 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt = -\frac{2}{3} + \pi$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶连续导数，且 $z = f(e^x \sin y)$ 满足，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2e^{2x} = 0$，且 $f(0)=1, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。**（12 分）**

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y f'(u),\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y f'(u)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \sin y f'(u) + e^{2x}\sin^2 y f''(u),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \sin y f'(u) + e^{2x}\cos^2 y f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2e^{2x} = e^{2x} f''(u) - 2e^{2x},$$

因为 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2e^{2x} = 0$，所以有 $f''(u) = 2$

$f'(u) = 2u + C_1$，据条件 $f'(0)=0$ 得 $C_1 = 0$，故 $f'(u) = 2u$，

$f(u) = u^2 + C_2$，据条件 $f(0)=1$，得 $C_2 = 1$，故 $f(u) = u^2 + 1$。

5．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负、不恒为零且有二阶连续导数，$f(x)$ 在 (a,b) 内有两个相异的零点，证明：存在 $c\in(a,b)$，使 $f'''(c)=0$。**（14 分）**

证明：因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个相异的零点，

故不妨设 $x_1,x_2\in(a,b), x_1<x_2$，使 $f(x_1)=f(x_2)=0$，

由题中条件知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，由罗尔定理，

存在 $x_3\in(x_1,x_2)$, 使得 $f'(x_3)=0$，

再由函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 非负、不恒为零，知 $f(x_1),f(x_2)$ 皆为 $f(x)$ 的最小值也是极小值，由极值的必要条件有 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，

在区间 $[x_1,x_3],[x_3,x_2]$ 上对函数 $f'(x)$ 分别使用罗尔定理，

存在 $x_4\in(x_1,x_3)$, 使得 $f''(x_4)=0$，存在 $x_5\in(x_3,x_2)$, 使得 $f''(x_5)=0$，

在区间 $[x_4,x_5]$ 上对函数 $f''(x)$ 使用罗尔定理，

存在 $c\in(x_4,x_5)\subset(a,b)$，使得 $f'''(c)=0$。

6. 设函数 $f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内二阶可导，且 $f(0)=1, f'(0)<1$，$f''(x)<f(x)$，证明：对于任意的实数 $x>0$，有 $f(x)<e^x$。**（14 分）**

证明：令 $g(x)=f(x)e^{-x}$, 则 $g(0)=1$，

$g'(x)=[f'(x)-f(x)]e^{-x}$, $g'(0)<0$，（下证：$f'(x)-f(x)<0$）

令 $h(x)=[f'(x)-f(x)]e^x$，则 $h(0)<0$，

$h'(x)=[f''(x)-f(x)]e^x$，因为 $f''(x)<f(x)$，故有 $h'(x)<0$，

即 $h(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内递减，于是当 $x>0$ 时，有 $h(x)<h(0)<0$，

故有 $[f'(x)-f(x)]e^x<0$，　即 $f'(x)-f(x)<0$

从而有 $g'(x)=[f'(x)-f(x)]e^{-x}<0$，

即 $g(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内递减，于是当 $x>0$ 时，有 $g(x)<g(0)$，

即 $f(x)e^{-x}<1$，也即 $f(x)<e^x$。

7. 计算曲线积分 $I=\int_L (y^2e^x-ay)dx+(2ye^x-a)dy$，其中 L 为任一从点 $A(3,2)$ 指向 $B(2,1)$ 位于线段 AB 上方的光滑曲线弧，且 L 与线段 AB 所围的平面区域的面积等于常数 b。（**(14 分)**）

解：记 $P=y^2e^x-ay,\ Q=2ye^x-a$， 则 $P_y=2ye^x-a,\ Q_x=2ye^x$，

添辅助线段 BA，弧 L 与线段 BA 所围的区域为 D，则

$$I=\int_{L+BA}(y^2e^x-ay)dx+(2ye^x-a)dy-\int_{BA}(y^2e^x-ay)dx+(2ye^x-a)dy$$

$$=\iint\limits_D (Q_x-P_y)dxdy-\int_{BA}(y^2e^x-ay)dx+(2ye^x-a)dy$$

$$=\iint\limits_D adxdy-\int_{BA}(y^2e^x-ay)dx+(2ye^x-a)dy$$

$$=ab-\int_{BA}(y^2e^x-ay)dx+(2ye^x-a)dy$$

又线段 BA 的方程为 $y=x-1$，

$$\int_{BA}(y^2e^x-ay)x+(2ye^x-a)dy=\int_{BA}y^2e^xdx+(2ye^x-a)dy-\int_{BA}\ aydx$$

$$=\int_{BA}\ d(y^2e^x-ay)-a\int_2^3(x-1)dx=(y^2e^x-ay)\big|_{(2,1)}^{(3,2)}-\frac{1}{2}a(x-1)^2\big|_2^3$$

$$=4e^3-e^2-a-\frac{3}{2}a=4e^3-e^2-\frac{5}{2}a$$

故 $\quad I=ab+e^2-4e^3+\frac{5}{2}a$ 。 （**注：**算线段 BA 上的积分也可直接算）

8．**注：一年级同学做 题（A）；高年级同学做题（B），否则解答无效。（14 分）**

（A）设 $f_n(x)=C_n^1\cos x-C_n^2\cos^2x+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cos^n x$，证明：

（1）对任意的正整数 n，方程 $f_n(x)=\frac{1}{2}$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内仅有一个根；

（2）对 $x_n\in(0,\frac{\pi}{2})$，满足 $f_n(x_n)=\frac{1}{2}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$。

证明：（1）由 $1-f_n(x)=1-C_n^1\cos x+C_n^2\cos^2x+\cdots+(-1)^nC_n^n\cos^n x=(1-\cos x)^n$

得 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n$，易知 $f_n(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，$f_n(0)=1,f_n(\frac{\pi}{2})=0,$

由介值定理，存在 $x_n\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $f_n(x_n)=\frac{1}{2}$ ，又 $f_n'(x)=-n(1-\cos x)^{n-1}\sin x<0$，

故方程 $f_n(x)=\frac{1}{2}$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内仅有一个根；

（2）因为 $f_n(x_n)=1-(1-\cos x_n)^n=\dfrac{1}{2}$，故有 $(1-\cos x_n)^n=\dfrac{1}{2}$，

即 $\cos x_n=1-\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}$，　有 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n=0$，

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\arccos(\cos x_n)=\arccos(\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n)=\dfrac{\pi}{2}$。

(B)．设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_n\neq 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=2$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}})$ 条件收敛。

证：　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=2$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，

另据极限的保号性，存在正整数 N，当 $n\geq N$ 时，有 $a_n>0$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=2$，因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，于是由比较判别法的极限形式，知

正项级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 发散，且发散到 $+\infty$，于是 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{a_{n+1}}$ 也发散到 $+\infty$，

于是级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}|(-1)^{n-1}(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}})|=\sum\limits_{n=N}^{\infty}(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}})$ 发散，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}})|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}|$ 发散，

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}})$ 的前项 n 和

$$s_n=(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2})-(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3})+\cdots+(-1)^{n-1}(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}})=\frac{1}{a_1}+(-1)^{n-1}\frac{1}{a_{n+1}}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，　故 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{1}{a_1}+\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_1}$，

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}})$ 收敛，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}})$ 条件收敛。